Diskrete Optimierungsverfahren zur Lösung von Sudokus

5		6	1			7		
	7		5			4		3
	9		2		3		6	
		2		5	9	1		
6	8						2	4
		7	4	8		5		
	2		8		4		5	
4		9			5		8	
		3			7	6		1

	8		2		6			
1	6							
6	1				4			
	9					3		
						7		5
							1	
				7			8	
		7		3				

5								
		2		3		9	1	
		1	6		5		7	
1			3		7		4	
		9				1		
	7		1		8			3
	2		4		9	6		
	4	3		1		7		
								4

6. Dezember 2006

Vortrag von Daniel Scholz

Einleitung über Sudokus

Einleitung

Bei einem **Sudoku** besteht die Aufgabe darin, 9×9 Felder unter Beachtung der bekannten Regeln zu vervollständigen.

Dabei haben die Sudokus in der Regel eine eindeutige Lösung.

5		6	1			7		
	7		5			4		3
	9		2		3		6	
		2		5	9	1		
6	8						2	4
		7	4	8		5		
	2		8		4		5	
4		9			5		8	
		3			7	6		1

Abbildung: Beispiel eines Sudokus.

Einleitung

Lösen von Sudokus

5		6	1			7		
	7		5			4		3
	9		2		3		6	
		2		5	9	1		
6	8						2	4
		7	4	8		5		
	2		8		4		5	
4		9			5		8	
		3			7	6		1

Abbildung: Beispiel eines Sudokus (Bild 1 von 3).

Einleitung

Lösen von Sudokus

5		6	1			7		
2	7		5			4	1	3
	9		2		3		6	
	4	2		5	9	1		
6	8						2	4
		7	4	8		5		
	2		8		4		5	
4		9			5		8	
8		3			7	6		1

Abbildung: Beispiel eines Sudokus (Bild 2 von 3).

Einleitung

Lösen von Sudokus

5		6	1			7		
2	7		5			4	1	3
	9		2		3		6	
	4	2		5	9	1		
6	8						2	4
		7	4	8		5		
	2		8		4	3 9	5	7 9
4		9			5	2 3	8	
8		3			7	6		1

Abbildung: Beispiel eines Sudokus (Bild 3 von 3).

Einleitung

Anzahl von Sudokus

Unter Beachtung der Regeln gibt es

$$6.670.903.752.021.072.936.960 \approx 6,67 \cdot 10^{21}$$

Möglichkeiten, um die Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ zu verteilen. Darunter gibt es

$$5.472.730.538 \approx 5,47 \cdot 10^{9}$$

Äquivalenzklassen.

Dennoch gibt es sehr viel mehr Sudokus!

Mathematisches Modell

Mathematisches Modell

Wir betrachten 81 Variablen

$$x_{i,j} \in \{1, 2, \ldots, 9\} \qquad \text{für} \quad 1 \leq i, j \leq 9$$

und es bedeute

$$x_{i,j} = k,$$

wenn im Feld (i, j) die Zahl $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ steht. Die Sudokuregeln erhalten wir nun, indem wir Ungleichungen der Form

$$x_{1,i} \neq x_{1,j} \qquad \text{für} \quad i \neq j$$

erzeugen.

Dieses sehr einfache und anschauliche Modell ist allerdings ungeeignet, um es algorithmisch zu lösen, da wir gerade Ungleichungen betrachten.

Mathematisches Modell

Verbessertes Modell

Um von Ungleichungen auf Gleichungen zu kommen, müssen wir weitere Variablen einführen.

Wir betrachten die $9^3 = 729$ Variablen

$$x_{i,j,k} \in \{0,1\} \qquad \text{für} \quad 1 \leq i,j,k \leq 9$$

un es bedeute

$$x_{i,j,k} = 1,$$

wenn im Feld (i,j) die Zahl k steht.

Mathematisches Modell

Die Variablen, die den Wert 1 haben, entsprechen in der folgenden Abbildung einer Kugel. Hier hat die Variable $x_{4,2,4}$ den Wert 1. Somit hat das gegebene Sudoku im Feld $(4, 2)$ den Eintrag 4.

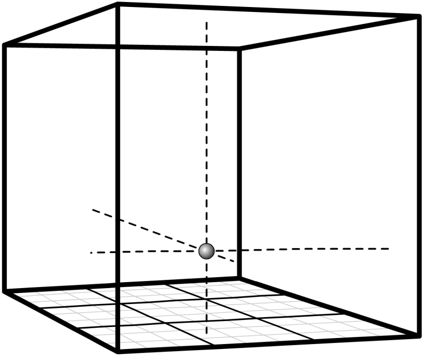

Abbildung: Die Variable $x_{4,2,4}$ hat den Wert 1.

Mathematisches Modell

Die *Höhe* der jeweiligen Kugel repräsentiert also den Eintrag im darunterliegenden Feld.

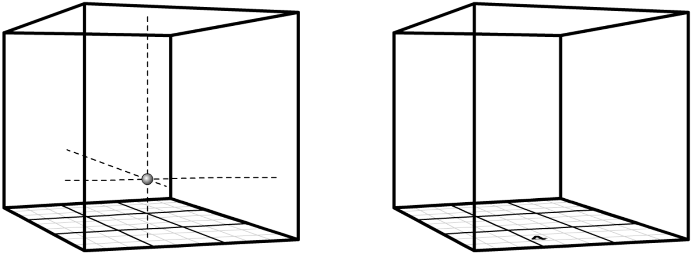

Abbildung: Die Variable $x_{4,2,4}$ hat den Wert 1.

Damit können wir die Sudokuregeln als Gleichungen formulieren.

Mathematisches Modell

Gleichungskette 1

Natürlich darf in jedem Feld (i, j) nur eine der 9 Variablen den Wert 1 annehmen. Wir erhalten die 81 Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{9} x_{i,j,k} = 1.$$

Mathematisches Modell

Gleichungskette 1

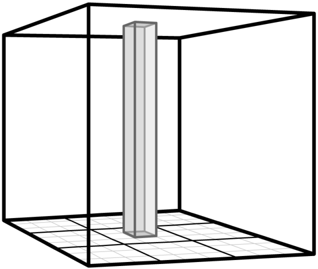

Abbildung: Jedes Feld kann nur von einer Zahl belegt werden.

Mathematisches Modell

Gleichungskette 2

Damit in jeder Spalte jede Zahl genau einmal vorkommt, erhalten wir die 81 Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{9} x_{i,j,k} \;=\; 1.$$

Mathematisches Modell

Gleichungskette 2

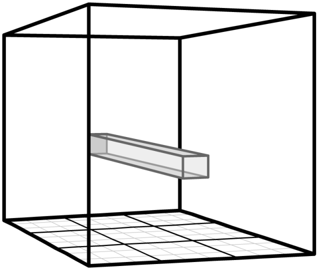

Abbildung: In jeder Spalte muss jede Zahl genau einmal vorkommen.

Mathematisches Modell

Gleichungskette 3

Für jede Zeile ergeben sich analog die 81 Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{9} x_{i,j,k} = 1.$$

Mathematisches Modell

Gleichungskette 3

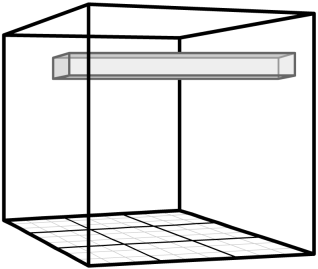

Abbildung: In jeder Zeile muss jede Zahl genau einmal vorkommen.

Mathematisches Modell

Gleichungskette 4

Nun müssen wir noch fordern, dass in jedem der 3×3 Quadrate jede Zahl genau einmal vorkommt. Dazu bezeichne

$$Q(a,b) \;=\; \{(i,j) \mid 3(a-1) < i \leq 3a,\, 3(b-1) < j \leq 3b\}$$

die 9 Quadrate. Damit erhalten wir die 81 Gleichungen

$$\sum_{(i,j)\in Q(a,b)} x_{i,j,k} \;=\; 1.$$

Mathematisches Modell

Gleichungskette 4

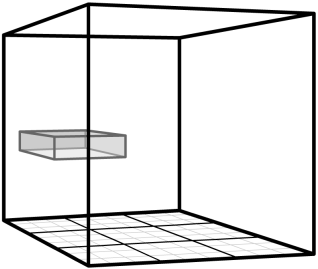

Abbildung: In jedem 3×3 Quadrat muss jede Zahl genau einmal vorkommen.

Mathematisches Modell

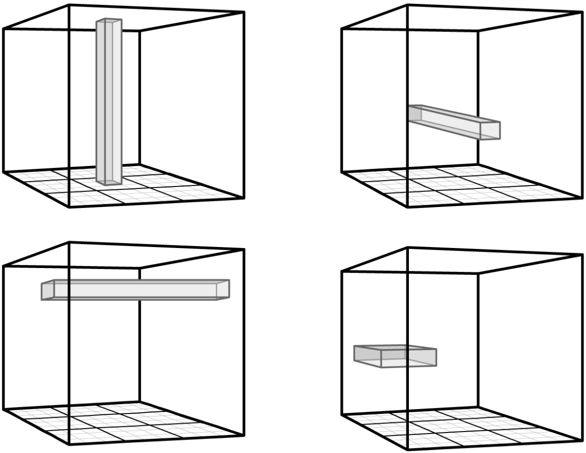

Abbildung: Zur Verdeutlichung aller $4 \cdot 81 = 324$ Gleichungen.

Mathematisches Modell

Aufstellen der Matrix A

Stellen wir die Matrix A zu diesem Gleichungssystem auf, so erhalten wir eine Matrix

$$A \in \mathbb{Z}^{324 \times 729},$$

die in jeder Zeile genau 9 und in jeder Spalte genau 4 Einträge hat, die 1 sind. Alle anderen Einträge sind 0.

Diese 324×729 Matrix wird stets unsere grundlegende Matrix sein.

Mathematisches Modell

Ergänzung der Matrix A

Zu einem gegebenen Sudoku können wir nun die vorgegebenen Variablen auf 1 setzen, indem wir der Matrix A Zeilen hinzufügen. Mit

$$b = (1, 1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^{324+v}$$

(wobei v die Anzahl der vorgegebenen Variablen bezeichne) ist die Lösung unseres Sudokus die eindeutige nicht negative ganzzahlige Lösung des Gleichungssystems

$$A \cdot x = b.$$

Wenige Grundlagen

Grundlagen

Definition

Wir betrachten das **ganzzahlige lineare Programm**

$$\min c^T x \quad \text{so dass} \quad Ax = b, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad x \geq 0. \tag{1}$$

Die **Relaxierung** von (1) ist

$$\min c^T x \quad \text{so dass} \quad Ax = b, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \geq 0. \tag{2}$$

Wir haben also nur den zulässigen Bereich vergrößert.

Grundlagen

Lemma 1

Sei (P) die Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programmes (IP), sei x^P optimal für (P) und x^{IP} optimal für (IP).

Dann gilt

$$c^T x^P \;\leq\; c^T x^{IP}.$$

Der optimale Zielfunktionswert der Relaxierung ist also immer kleiner oder gleich des optimalen Zielfunktionswertes des ganzzahligen Programmes.

Grundlagen

Beweis von Lemma 1

Es gilt sofort

$$c^T x^P = \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \leq \min_{x \in \mathbb{Z}^n} c^T x = c^T x^{IP},$$

da $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. □

Grundlagen

Lemma 2

Sei (P) die Relaxierung eines ganzzahligen linearen Programmes (IP).

Ist x^* optimal für (P) und gilt $x^* \in \mathbb{Z}^n$, so ist x^* auch optimal für (IP).

Grundlagen

Beweis von Lemma 2

Es gilt

$$c^T x^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \leq c^T x' \qquad \text{für alle} \quad x' \in \mathbb{Z}^n.$$

Somit ist $c^T x^*$ eine untere Schranke für (IP) und falls $x^* \in \mathbb{Z}^n$, so ist x^* auch optimal für (IP). $\square$

Grundlagen

Lösungsidee?

Relaxierung lösen und auf eine ganzzahlige Lösung runden.

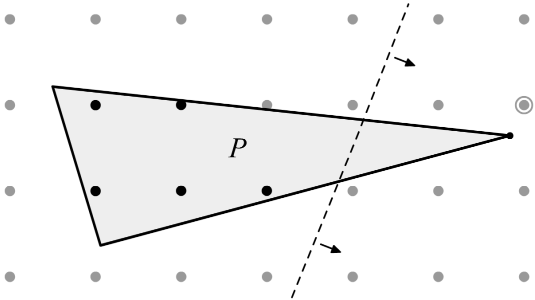

Abbildung: Die gerundete Lösung liegt weit weg von der ganzzahligen Lösung.

Lösungsideen

Lösungsideen

Wir betrachten wieder

$$A \in \mathbb{Z}^{324\times 729} \qquad \text{und} \qquad b \in \mathbb{Z}^{324}$$

und untersuchen $A \cdot x = b$. Wir wissen, dass jede Variable nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, somit gibt es

$$2^{729} \approx 3 \cdot 10^{219}$$

Möglichkeiten.

Wenn jede Probe nur $0,00000000001$ Sekunden dauern würde, bräuchte man 10^{200} Jahre zum Testen der Möglichkeiten.

Lösungsidee einfaches Minimierungsproblem

Wir betrachten das Problem

$$\min c^T x \qquad \text{so dass} \qquad Ax = b, \quad x \in \mathbb{Z}^{729}, \quad x \geq 0.$$

Dabei ist A die bereits vorgestellt 324×729 Matrix und es gilt $b = (1, \ldots, 1)$.

Damit die vorgegeben Variablen den Wert 1 annehmen, setzen wir einfach die entsprechenden Kosten im Kostenvektor c auf 0. Die Kosten aller anderen Variablen seien 1.

Ist die Lösung der Relaxierung ganzzahlig, so haben wir nach Lemma 2 auch die Lösung des ganzzahligen Programmes berechnet.

Lösungsidee einfaches Minimierungsproblem

Ergebnis 1 (einfaches Minimierungsproblem)

Im Allgemeinen ist die Lösung der Relaxierung nicht ganzzahlig (obwohl es nur eine eindeutige ganzzahlige Lösung gibt).

Lösungsidee Variablen erkennen

Veranschaulichung der zweiten Lösungidee.

							3	1
				3				
3								
						3		

Abbildung: Lösen einfacher Felder.

Lösungsidee Variablen erkennen

Übertragung aufs Modell

Bei jedem Sudoku sind einige Felde vorgegeben, wir können also einige Variablen sicher auf 1 setzen.

Für eine vorgegebene Zahl gilt:

1. In dem vorgegebenen Feld kann natürlich keine andere Zahl stehen.
2. In der Spalte der vorgegebenen Zahl darf diese Zahl kein weiteres Mal vorkommen.
3. In der Zeile der vorgegebenen Zahl darf diese Zahl kein weiteres Mal vorkommen.
4. In dem 3×3 Quadrat der vorgegebenen Zahl darf diese Zahl kein weiteres Mal vorkommen.

Lösungsidee Variablen erkennen

Zu jeder vorgegebenen Variable können wir weitere Variablen finden, die wir sicher auf 0 setzen können.

Dadurch können wir weitere Felder lösen. Dies ist genau dann der Fall, wenn wir eine Zeile in der Matrix A erhalten, die nur einen Eintrag hat, der 1 ist.

Mit dieser Idee können wir bis zu 650 von den 729 Variablen lösen.

Eine derartige Idee zur Vereinfachung des Problems, bevor wir versuchen das ganzzahlige Programm zu lösen, wird als **Presolving** bezeichnet.

Lösungsidee Variablen erkennen

Ergebnis 2 (Variablen erkennen)

Wir erhalten (bei allen Beispielen) nur zu den Sudokus eine ganzzahlige Lösung, bei denen wir auch zuvor schon eine ganzzahlige Lösung hatten.

Lösungsidee Zulässigkeit prüfen

Veranschaulichung der dritten Lösungidee.

5			9		1			
		2		3	4	9	1	5
	9	1	6		5		7	
1			3		7		4	
		9				1		7
2	7		1		8			3
	2		4		9	6	3	1
	4	3		1		7		
	1				3			4

Abbildung: Lösen einfacher Felder.

Lösungsidee Zulässigkeit prüfen

Übertragung aufs Modell

Wir setzen die Variablen alle nacheinander testweise auf 1 und untersuchen die Zulässigkeit des Minimierungsproblems. Ist das Programm nicht zulässig, so muss die Variable den Wert 0 annehmen.

Ein derartiges (aufwendiges) Testverfahren wird als **Probing** bezeichnet.

Lösungsidee Zulässigkeit prüfen

Ergebnis 3 (Zulässigkeit prüfen)

Die Lösung ist bei allen bekannten Sudokus mit einer eindeutigen Lösung ganzzahlig.

Die Autoren aus [2] behaupten, dass sie mit diesem Probing-Verfahren 15.000 Sudokus gelöst haben.

Lösungsideen im Überblick

	nur Relaxierung	mit Presolving	mit Probing
Sudoku 01	x	x	x
Sudoku 02	-	-	x
Sudoku 03	x	x	x
Sudoku 04	-	-	x
Sudoku 05	-	-	x
Sudoku 06	-	-	x
Sudoku 07	-	-	x
Sudoku 08	-	-	x
Sudoku 09	x	x	x
Sudoku 10	x	x	x
Sudoku 11	x	x	x
Sudoku 12	x	x	x
Sudoku 13	-	-	x
Sudoku 14	-	-	-

Tabelle: Anwendung der Lösungsideen auf einige Beispiel-Sudokus.

Diskussion

Diskussion

Backtracking

Natürlich können Sudokus auch ohne ganzzahliger Programmierung gelöst werden. Wir können nach dem Presolving ein **Backtracking**-Verfahren starten.

Dazu erraten wir einfach eine der ungelösten Variablen. Wenn wir mit dieser geratenen Lösung das Sudoku komplett lösen können, wurde richtig geraten.

Diskussion

Total unimodular

Eine $m \times n$ Matrix A heißt **total unimodular**, wenn jede quadratische Submatrix von A eine Determinante hat, die -1, 1 oder 0 ist.

Für Minimierungsprobleme mit derartigen Matrizen A lässt sich zeigen, dass für jeden Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ und für jeden Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$ die Lösung der entsprechenden Relaxierung ganzzahlig ist.

Diskussion

Presolving und Probing

Beim **Presolving** handelt es sich um Verfahren, mit denen anhand von Implikationen, die aus dem ganzzahligen Programm abgeleitet werden können, das Minimierungsproblem vereinfacht werden kann.

Beim **Probing** liegt eine verstärkte Form des Presolvings vor. Hier werden unterschiedliche Argumente verwendet, um das Problem zu vereinfachen.

Diskussion

Schnittebenenverfahren

Beim Schnittebenenverfahren bestimmt man eine untere Schranke durch Berechnung der Relaxierung. Das Problem wird dann durch Hinzufügen von Schnittebenen weiter verstärkt.

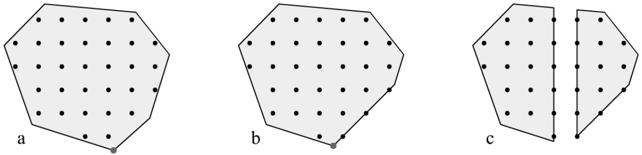

Abbildung: Zum Schnittebenenverfahren.

Ist keine Verbesserung mehr möglich, wird das Problem in Teilprobleme zerlegt.

Diskussion

Fazit

Eines sollte nun klar geworden sein:

Ganzzahlige Optimierung ist schwer!

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

Felgenhauer, B. ; Jarvis, F.:
Mathematics of Sudoku I.
In: *Mathematical Spectrum* 15 (2006), S. 15–23

Kaibel, V. ; Koch, T.:
Mathematik für den Volkssport.
In: *DMV-Mitteilungen* 14 (2006), S. 93–96

Russell, E. ; Jarvis, F.:
Mathematics of Sudoku II.
In: *Mathematical Spectrum*. – forthcoming

Schöbel, A.:
Optimierung.
2006. – Skript zur Vorlesung im SoSe 2005 an der Uni Göttingen