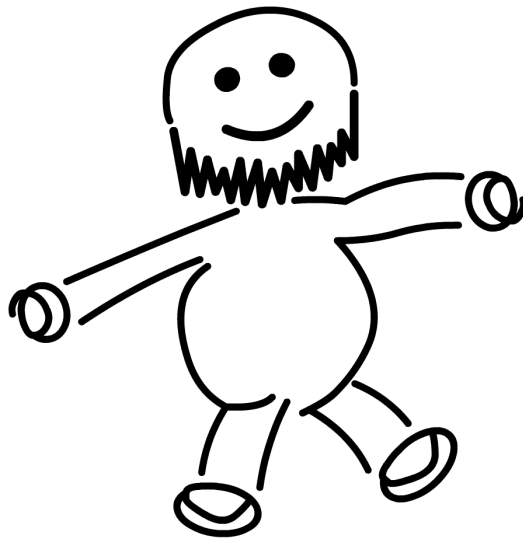


Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 12

Messung großer Widerstände

Wintersemester 2005 / 2006



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
E-Mail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	B9
Assistent:	Tobias Liese
Durchgeführt am:	22. September 2005
Protokoll abgeben:	26. September 2005
Protokoll verbessert:	—

Testiert: _____

1 Einleitung

In diesem Versuch wollen wir uns mit Stromkreisen auseinandersetzen, vor allem mit Schwingkreisen und Impedanzmessung.

Ziel ist es jeweils einen großen unbekanntem Widerstand R_x zu messen.

2 Theorie

2.1 Widerstandsmessung

Herkömmliche Messung

Um die Größe eines Widerstands zu messen, kann man das Ohmsche Gesetz $R = U/I$ benutzen. So besteht zum Beispiel die Widerstandsbestimmung eines Multimeters häufig darin, Spannung und Strom über dem Widerstand zu bestimmen. Bei großen Widerständen stößt man da auf mehrere Probleme. Zum Einen benötigt man sehr hohe Spannungen um einen messbaren Strom zu erzeugen [schwer handhabbar: Blitzentladungen]. Zum Anderen ist dann der Innenwiderstand des Voltmeters in der gleichen Größenordnung wie der des zu messenden Widerstands. Dadurch fließt ein großer Teil des Stroms auch über ihn ab, was die Widerstandsmessung stark verfälscht. Durch einen Vorwiderstand kann man den Messbereich von Ampère- und Voltmeter zwar erweitern, aber auch nur im begrenzten Rahmen. Eine bessere Möglichkeit bietet die **Wheatstonsche Brücke**, da man hier nicht mit den Innenwiderständen von Messgeräten zu kämpfen hat. Sie kann übrigens auch allgemein zur Bestimmung von Kapazitäten und Induktivitäten eingesetzt werden, was natürlich wesentlich genauer ist, als die Berechnung aus den geometrischen Daten:

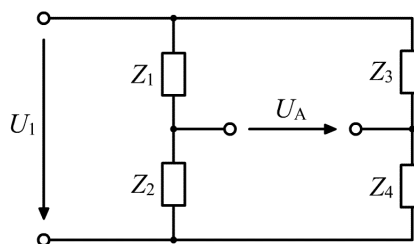


Abbildung 1: Wheatstonsche Brückenschaltung.

Sei Z_1 die gesuchte Impedanz, Z_4 regelbar. Dann gilt im abgeglichen Zustand

$$Z_1 = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_4}.$$

2.2 Messung großer Widerstände mit Kondensatoren

Im Versuch betrachten wir noch eine andere Möglichkeit einen unbekanntem Widerstand zu messen. Dabei werden Ladungen beobachtet, die von einem

geladenen Kondensator über ein R - C -Parallelkreis abfließen. Betrachten wir also den Entladevorgang eines Kondensators mit Kapazität C und Anfangsladung Q_0 über einen unbekanntem Widerstand R . Es muss nach der Maschenregel gelten:

$$\begin{aligned} U_C &= -U_R \\ I_C &= \dot{Q}_C = C \cdot \dot{U}_C, \quad \text{also} \\ \dot{Q} &= -C \cdot \dot{U}_R = -C \cdot R \cdot \ddot{Q} \quad \text{und somit} \\ Q(t) &= Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Misst man nun die Ladung Q zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 , so kann man R bestimmen, denn aus

$$\frac{Q(t_1)}{Q(t_2)} = \exp\left(\frac{t_2 - t_1}{R \cdot C}\right)$$

folgt gerade

$$R = \frac{t_2 - t_1}{C \cdot \log\left(\frac{Q(t_1)}{Q(t_2)}\right)}. \tag{2}$$

Diese Messung ist aber nur für große Widerstände genau. Bei kleinen ist der Kondensator zu schnell entladen, um exakte Ladungsunterschiede zwischen verschiedenen Zeiten messen zu können.

In unserem Experiment haben wir es aber mit großen Widerständen zu tun. Sowohl der zu bestimmene Widerstand, als auch der Isolationswiderstand des Kondensators, der im Idealfall unendlich ist, können mit der oben genannten Methode bestimmt werden. Dabei muss der Isolationswiderstand separat bestimmt werden, da sonst nur der Gesamtwiderstand des Systems messbar ist [und nicht der zu messende Einzelwiderstand].

Nun müssen wir uns damit beschäftigen, wie wir die Ladung überhaupt messen können.

Analoger Stromintegrator

Anstelle einer Ladungsmessung mit einem ballistischem Galvanometer wie im Versuch 11 benutzen wir einen analogen Stromintegrator [siehe Abbildung 2]. Er ist in der Lage, eine Potenzialdifferenz tausendfach zu verstärken und am Ausgang bereitzustellen.

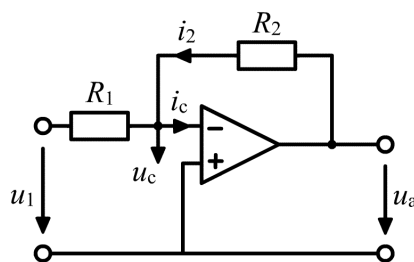


Abbildung 2: Stromintegrator

In der Abbildung bezeichnet R_1 einen ohmschen Widerstand und R_2 eine Kapazität, u_1 Eingangs- und u_a Ausgangsspannung. Wir wollen nun die Ausgangsspannung u_a berechnen. Aufgrund der Kirchhoffschen Regel gilt

$$I_{R_1} + I_{R_2} = 0,$$

I_{R_2} ist der Strom über den Kondensator, somit gilt

$$I_{R_2} = \dot{Q}_{R_2} = R_2 \cdot \dot{u}_a.$$

Mit $I_{R_1} = u_1/R_1$ folgt

$$u_a = -\frac{1}{R_1 \cdot R_2} \int_{t_0}^{t_1} u_1 dt \sim \int I_R.$$

Offensichtlich ist die Ausgangsspannung proportional zum Integral über dem Eingangsstrom, das heißt zur geflossenen Ladung. Zur Eichung des Stromintegrators bestimmt man folglich diese Proportionalitätskonstante G .

Nun wissen wir also, wie unsere Versuchsanordnung funktioniert. Wir haben es mit einem R - C -Parallelkreis zu tun, bei dem der Ladungsabfall mit dem analogen Stromintegrator gemessen wird. Da nach jeder Ladungsmessung der Kondensator entladen ist, muss er für weitere Messungen zu anderen Zeitpunkten wieder neu aufgeladen werden.

Um möglichst wenige Fehler zu machen, muss man beachten, dass man Induktion zwischen den Leitern verhindert. Die Eichmessung sollte deshalb separat aufgebaut werden und mit kurzen, von einander entfernten Kabeln durchgeführt werden. Des Weiteren beeinflusst die Luftfeuchtigkeit den Isolationswiderstand, da Ladungen über die feuchte Luft abfließen können. Sie erhöht ebenfalls die zu bestimmende Dielektrizitätskonstante systematisch. Diese wird bestimmt, indem wir die die Kapazitätsberechnung nach Kirchhoff benutzen, welche die Randeffekte berücksichtigt. Sie wird mit der im Versuch berechneten Kapazität $C = Q/U$ gleichgesetzt:

$$C_n = (n-1)\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \log \left(\frac{16\pi r}{d} - 1 \right) \right), \quad (3)$$

dabei ist n die Plattenanzahl, r der Plattenradius, d der Plattenabstand und wir nehmen als Näherung $\varepsilon_r = 1$ an [nicht ganz korrekt für feuchte Luft]. In unserem Falle gilt $n = 65$, $r = 10 \text{ cm}$ und $d = 0.5 \text{ cm}$.

2.3 R - C und R - L - C -Parallelkreis

Bei unseren Versuchen arbeiten wir mit Parallelschwingkreisen, welche von einem Impulsgenerator gespeist werden:

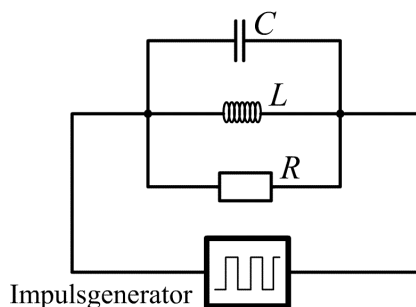


Abbildung 3: Parallelschwingkreis.

Den R - C -Kreis haben wir in Kapitel 2.1 schon besprochen. Wird eine konstante Spannung U_0 angelegt, so lädt sich der Kondensator auf. Entkoppelt man ihn wieder, so verhält sich die Entladung wie oben berechnet:

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right).$$

Also entlädt sich der Kondensator wie folgt:

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 \exp\left(-\frac{t}{R \cdot C}\right).$$

Der R - L - C -Kreis weist eine Analogie zum mechanischen Schwinger auf, es ergibt sich ebenso eine Schwingungsgleichung:

$$\begin{aligned} U_C + U_R &= U_0 + U_L, \\ \frac{Q}{C} + R \cdot I + L \frac{dI}{dt} &= U_0, \\ \ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{CL} Q &= \frac{U_0}{L}. \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine gedämpfte harmonische Schwingung, die für $t \rightarrow \infty$ gegen Q_0 strebt. Ist der Schwingkreis abgeklemmt, also $Q_0 = 0$, dann erhalten wir offensichtlich

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0,$$

dabei gilt

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4)$$

Weiterhin kann man das logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot T \quad (5)$$

bestimmen.

Hoch- und Tiefpass

Ein elektrischer Hochpass ist eine Schaltung, die hohe Frequenzen ω praktisch ungedämpft durchlässt, tiefe Frequenzen aber unterdrückt. Das Gegenstück dazu ist der Tiefpass.



Abbildung 4: links Hochpass, rechts Tiefpass.

Man macht sich ganz schnell klar, dass gilt:

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \cdot U_e.$$

Durch Bildung des komplex konjugierten, des Betrags und der Phasenverschiebung φ erhält man

$$|U_a| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot |U_e|,$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega RC}.$$

Man sieht anhand dieser Gleichung, dass das Verhältnis von $|U_a|/|U_e|$ für $\omega = 0$ Null ist und mit wachsendem ω gegen 1 strebt. Die Phasenverschiebung φ sinkt von 90° bei $\omega = 0$ bis auf Null.

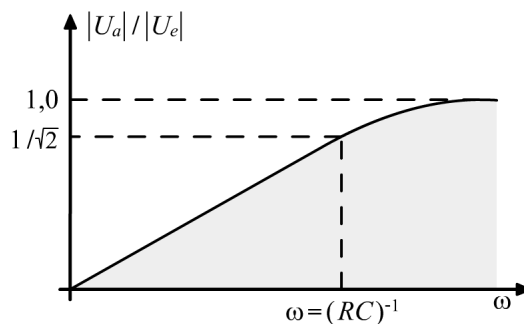


Abbildung 5: Verhältnis der Spannungen zur Frequenz.

Ganz äquivalent kann man den Tiefpass berechnen.

$$|U_a| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot |U_e|,$$

$$\tan \varphi = -\omega RC.$$

Man erkennt dann, dass hier das Verhältnis $|U_a|/|U_e|$ von 1 bei $\omega = 0$ auf Null sinkt für $\omega \rightarrow \infty$. Die Phasenverschiebung geht von Null auf -90° .

3 Versuchsdurchführung

3.1 Messungen mit dem Stromintegrator

Zunächst muss der Stromintegrator geeicht werden, indem wir Stromstöße bei einer bestimmten Spannung für unterschiedliche Zeitintervalle messen.

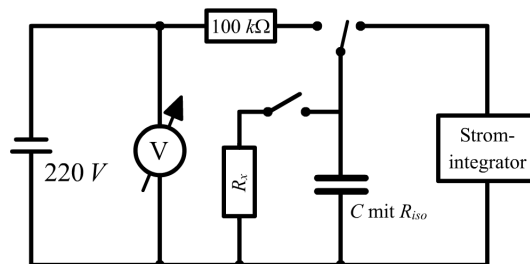


Abbildung 6: Versuchsaufbau zum Messkreis.

Danach wird der auf 220 V aufgeladene Kondensator sofort über einen Messkreis ohne Widerstand entladen und die dabei geflossene Ladung notiert. Danach wird der zu messende Widerstand zugeschaltet, der Kondensator aufgeladen und es wird die Ladung notiert, die nach verschiedenen Zeiten noch auf dem Kondensator vorhanden ist. Zur Bestimmung des Isolatorwiderstands wird diese Messung nochmal ohne den großen Widerstand wiederholt.

3.2 Messungen zum Schwingkreis

Bei dieser Messreihe werden Spannungsverläufe $U(t)$ mit einem Impulsgenerator erzeugt und mit einem Oszilloskop gemessen. Dabei werden die folgenden Elemente verbunden:

- (1) Keine weiteren Elemente, Impulsgenerator zur Kontrolle alleine.
- (2) Impulsgenerator mit Plattenkondensator.
- (3) Impulsgenerator mit Plattenkondensator und einem $2 M\Omega$ Widerstand parallel geschaltet.
- (4) Impulsgenerator mit Plattenkondensator und dem unbekanntem Widerstand R_x parallel geschaltet.
- (5) Impulsgenerator mit Plattenkondensator und einer Drosselspule parallel geschaltet.
- (6) Impulsgenerator mit Plattenkondensator und einer Luftspule parallel geschaltet.
- (7) Impulsgenerator mit kommerziellem Kondensator und $2 M\Omega$ Widerstand parallel geschaltet.

Als Letztes müssen mit dem Multimeter noch die notwendigen Daten wie Innenwiderstände der Messgeräte, Widerstände der Elemente in den Schaltungen und die Kapazitäten der Kondensatoren aufgenommen werden.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Eichkonstanten

Der Eichvorgang am Stromintegrator wurde durch kurze Spannungsstöße bekannter Dauer Δt durchgeführt. Es bezeichne nun x den Wert auf der Digitalanzeige des Stromintegrators in der Einheit Skalenteile $[Skt]$. Dann erhält man die gesuchte Proportionalitätskonstante G durch folgende Gleichung:

$$Q = \frac{1}{R_v} \int U_t dt = \frac{U_t}{R_v} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad G = \frac{Q}{x} = \frac{U_t \cdot \Delta t}{R_v \cdot x},$$

dabei ist $U_t = 1.238 V$ die Spannung des Eichgenerators und $R_v = 100 k\Omega$ der Eingangswiderstand des Ladungsmessgerätes¹. Wir erzielten dabei folgende Werte:

Dauer Δt in s	x in Skt	G in C/Skt
0.0216	2.18	1.229
0.0268	2.70	1.227
0.0520	5.27	1.222
0.0640	6.24	1.234
0.0720	7.28	1.224
0.0870	8.82	1.221

Der Mittelwert mit Standardabweichung liefert uns nun das Ergebnis

$$G = (1.22612 \pm 0.00491) \cdot 10^{-7} \frac{C}{Skt}.$$

4.2 Berechnung von ε_0 und Kapazität des Plattenkondensators

Nach Gleichung (3) gilt

$$C = \frac{Q}{U} = (n-1)\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \log \left(\frac{16\pi r}{d} - 1 \right) \right)$$

¹ Beide Werte nach Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 109.

und somit folgt mit der Näherung $\varepsilon_r = 1$ gerade

$$\varepsilon_0 = \frac{Q}{U \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \log \left(\frac{16\pi r}{d} - 1 \right) \right)}.$$

In unserem Fall gilt wie unter 2.2 schon beschrieben $n = 65$, $r = 10 \text{ cm}$ und $d = 0.5 \text{ cm}$. Weiter ist $U = 200 \text{ V}$ die verwendete Spannung und Q die Ladungsmenge, die wir nun durch die Eichkonstante G berechnen können. Es ergibt sich nun

$$\varepsilon_0 = \frac{Q}{98199 \text{ CVm}} \frac{\text{As}}{\text{CVm}} = \frac{G \cdot Q'}{98199 \text{ CVm}} \frac{\text{As}}{\text{CVm}},$$

dabei ist $Q' = Q/G$ die gemessene Ladungsmenge in *Sk*t.

Es sei nun $C_{Pl} = Q/U$ die Kapazität des Plattenkondensators. Unsere berechneten Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle angegeben, die Fehler ergeben sich dabei jeweils aus dem Fehler von G :

Q' in <i>Sk</i> t	Q in <i>nC</i>	C_{Pl} in <i>nF</i>	ε_0 in <i>AS/Vm</i>
7.13	874.2 ± 3.5	3.974 ± 0.016	$(8.903 \pm 0.036) \cdot 10^{-12}$
7.14	875.5 ± 3.5	3.979 ± 0.016	$(8.915 \pm 0.036) \cdot 10^{-12}$
7.13	874.2 ± 3.5	3.974 ± 0.016	$(8.903 \pm 0.036) \cdot 10^{-12}$
7.05	864.4 ± 3.5	3.929 ± 0.016	$(8.803 \pm 0.035) \cdot 10^{-12}$
7.17	879.1 ± 3.5	3.996 ± 0.016	$(8.952 \pm 0.036) \cdot 10^{-12}$
7.05	864.4 ± 3.5	3.929 ± 0.016	$(8.803 \pm 0.035) \cdot 10^{-12}$
7.09	869.3 ± 3.5	3.951 ± 0.016	$(8.853 \pm 0.035) \cdot 10^{-12}$
7.05	864.4 ± 3.5	3.929 ± 0.016	$(8.803 \pm 0.035) \cdot 10^{-12}$

Die gewichteten Mittelwerte ergeben nun

$$C_{Pl} = 3.9574 \pm 0.0056 \text{ nF} \quad \text{und} \\ \varepsilon_0 = (8.8659 \pm 0.0125) \cdot 10^{-12} \frac{\text{AS}}{\text{Vm}}.$$

Der Literaturwert² ist $\varepsilon_0 = 8.854188 \cdot 10^{-12} \text{ AS/Vm}$, somit haben wir ein hervorragendes Ergebnis erzielt.

4.3 Isolationswiderstand R_{iso} und unbekannter Widerstand R_x

Nun werden die gemessenen Ladungsmengen logarithmisch gegen die Zeit aufgetragen und durch lineare Regression wird die Steigung m bestimmt. Gleichung (2) zeigt nun, dass für den verwendeten Widerstand R dann

$$R = - \frac{1}{m \cdot C_{Pl}} \quad (6)$$

² Nach D. Meschede (2001): "Gerthsen Physik", 21. Auflage, Springer Verlag Berlin.

gilt, dabei ist C_{Pl} die Kapazität des Kondensators.

Nach dieser Methode wird zunächst der Isolationswiderstand R_{iso} bestimmt. Die folgende Abbildung zeigt die beschreibende lineare Regression:

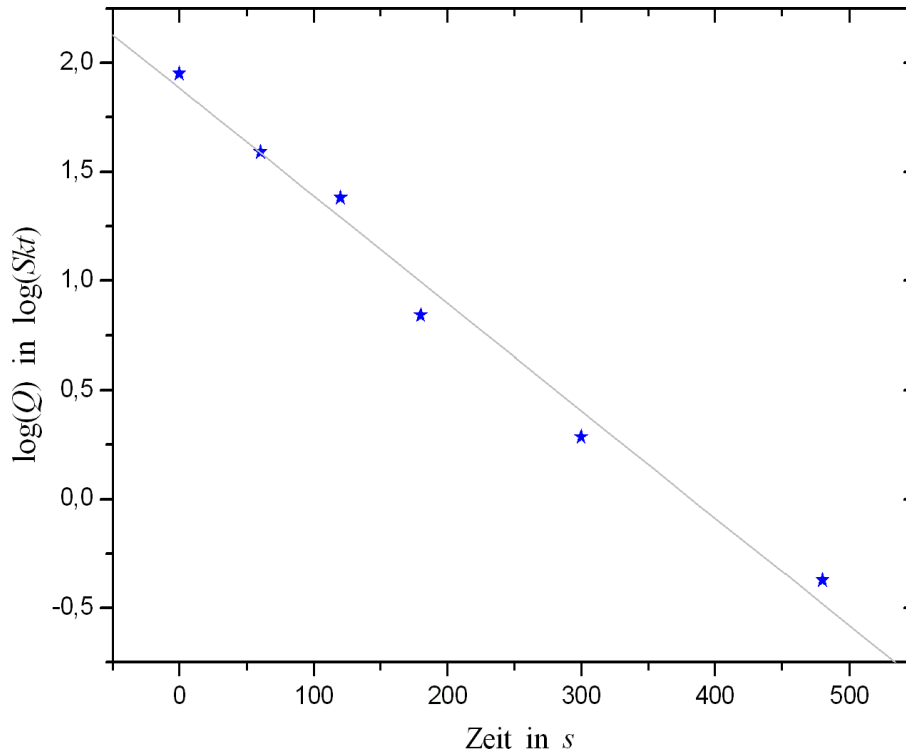


Abbildung 7: Logarithmische Auftragung der Ladungsmengen gegen die Zeit.

Wir erhalten die Steigung

$$m_{iso} = -0.004920 \pm 0.00032 \frac{Skt}{s}$$

und können nun durch Gleichung (6) den Widerstand R_{iso} mit dem Fehler

$$\sigma_{R_{iso}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{m_{iso}}}{m_{iso}^2 \cdot C_{Pl}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{C_{Pl}}}{m_{iso} \cdot C_{Pl}^2}\right)^2}$$

bestimmen. Wir erhalten

$$R_{iso} = 51.360 \pm 3.341 \text{ G}\Omega$$

Durch die zweite Messung mit parallel geschaltetem Widerstand R_x können wir nun analog den Widerstand $R = R_x + R_{iso}$ berechnen.

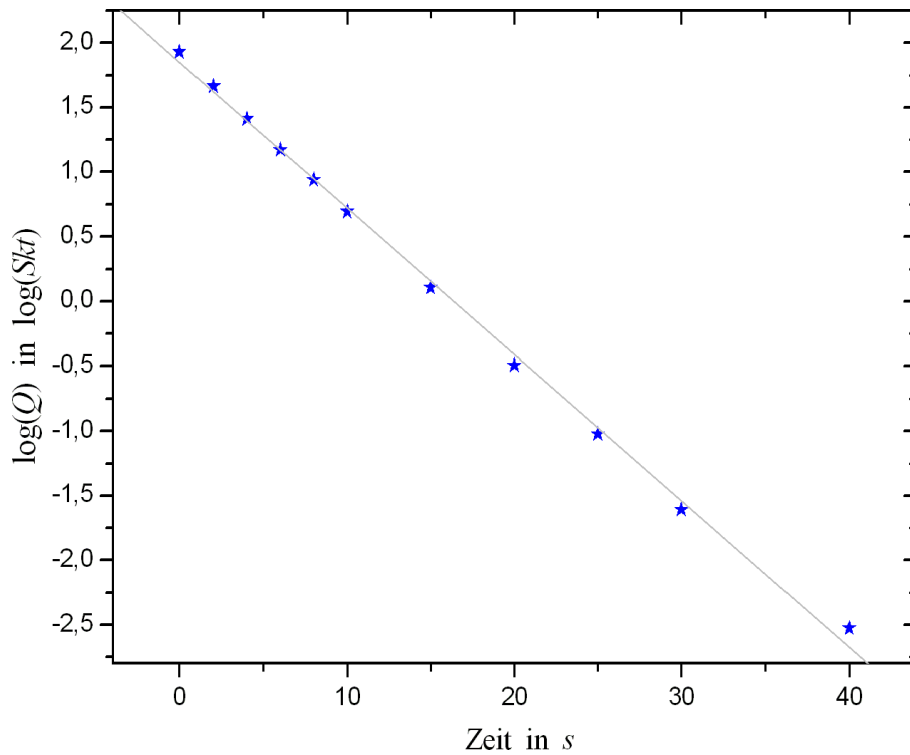


Abbildung 8: Logarithmische Auftragung der Ladungsmengen gegen die Zeit.

Wir erhalten hier eine Steigung von

$$m = -0.11298 \pm 0.00177 \frac{Skt}{s}$$

und können damit nun R berechnen:

$$R = 2.237 \pm 0.035 \text{ G}\Omega.$$

Für den gesuchten Widerstand R_x gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{iso}} + \frac{1}{R_x} \quad \Leftrightarrow \quad R_x = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{iso}}}.$$

Wir erwarten dabei einen Fehler von

$$\sigma_{R_x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R^2 \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{iso}} \right)^2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_{iso}}}{R_{iso}^2 \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{iso}} \right)^2} \right)^2}$$

und erhalten damit das Endergebnis

$$R_x = 2.338 \pm 0.103 \text{ G}\Omega.$$

4.4 Spannungsverläufe mit dem Impulsgenerator

Die Ausdrücke der verschiedenen Spannungsverläufe **(1)** bis **(7)** wie in der Versuchsdurchführung beschrieben liegen im Anhang bei.

Verlauf **(1)** zeigt den Spannungsverlauf des Impulsgenerators, bei dem in bestimmten Zeitintervallen kurze Spannungstöße erzeugt werden. **(2)** zeigt den Verlauf für einen Kondensator, wie erwartet ist ein exponentieller Abfall der Spannung zu erkennen. Bei **(3)** ist der Verlauf ähnlich zu **(2)**, diesmal war ein Widerstand parallel geschaltet und dadurch entlädt sich der Kondensator schneller. Schaltet man einen sehr großen Widerstand parallel mit dem Kondensator, so ergibt sich der Verlauf wie er in **(4)** zu sehen ist. Bei **(5)** und **(6)** sind abklingende harmonische Schwingungen zu sehen. Dieser Spannungsverlauf war ebenfalls zu erwarten, da es sich hierbei um Schwingkreise handelt. In **(7)** ist abschließend der Spannungsverlauf eines kommerziellen Kondensators mit einem parallel geschalteten Widerstand zu sehen. Es ist eine Ähnlichkeit zu den Verläufen **(2)** und **(3)** zu beobachten, wahrscheinlich haben beide Kondensatoren ähnliche Kapazitäten.

4.5 Eingangswiderstand des Oszilloskops und Kapazität C_{Pl}

Aus den Spannungsverläufen **(2)** und **(3)** soll nun der Eingangswiderstand R_0 des Oszilloskops sowie erneut die Kapazität C_{Pl} des Plattenkondensators berechnet werden.

Nach Gleichung (1) gilt auch

$$\log(U(t)) = \log(U_0) - \frac{1}{R \cdot C} \cdot t.$$

Trägt man die Spannungen also logarithmisch gegen die Zeit auf, so erhält man durch lineare Regression die Steigung $m = -1/R \cdot C$. Dies führen wir nun für **(2)** und **(3)** durch.

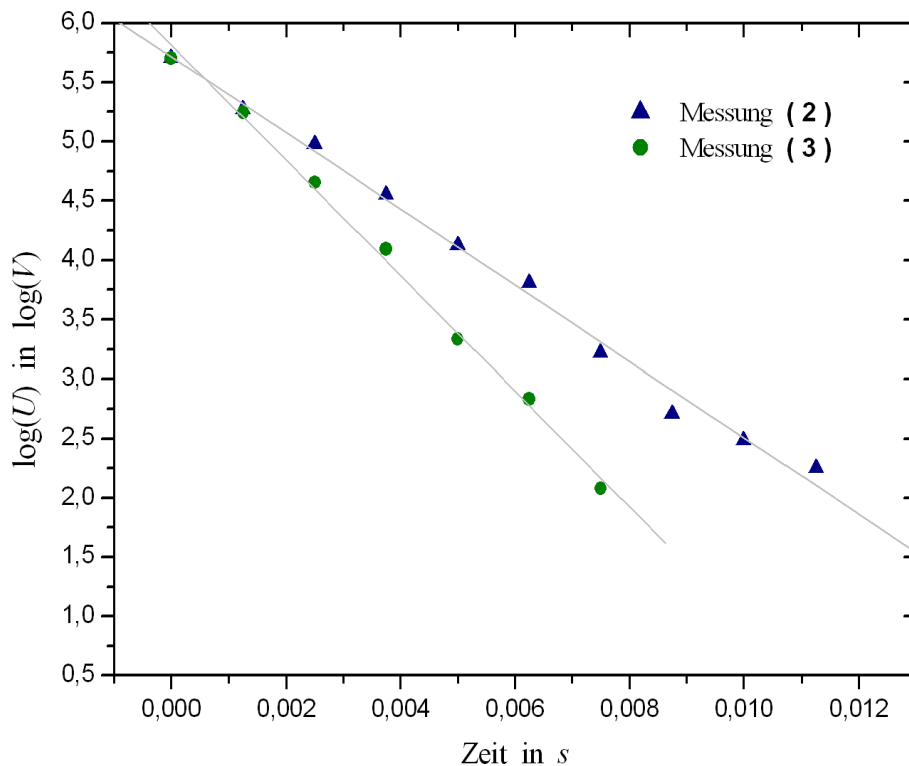


Abbildung 9: Logarithmische Auftragung der Spannung gegen die Zeit.

Durch lineare Regression ermittelten wir die Steigung

$$\alpha = -321.19 \pm 9.20 \frac{\log(V)}{s}$$

für Verlauf **(2)** und analog

$$\beta = -486.35 \pm 13.74 \frac{\log(V)}{s}$$

für **(3)**. Es gilt nun

$$-\alpha = R_0 \cdot C_{Pl} \quad \text{und} \quad -\beta = R \cdot C_{Pl}, \quad (7)$$

dabei ist R der Gesamtwiderstand bei Messung **(3)** und es gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_E} \quad (8)$$

mit dem parallel geschalteten Widerstand $R_E = 2 \text{ M}\Omega$. Durch Division der Gleichungen aus (7) und durch Ersetzen des Gesamtwiderstandes R nach (8) folgt nun

$$R_0 = R_E \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = 679176 \Omega. \quad (9)$$

Wir erhalten dabei einen Fehler von

$$\sigma_{R_0} = \sqrt{\left(\frac{R_E \cdot \sigma_\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{R_E \cdot \alpha \cdot \sigma_\beta}{\beta^2}\right)^2} = 53139 \Omega.$$

Nun kann auch sofort die Kapazität C_{Pl} berechnet werden:

$$C_{Pl} = \frac{-\alpha}{R_0} = 472.91 \mu F,$$

es ergibt sich dazu der Fehler

$$\sigma_{C_{Pl}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{\alpha \cdot \sigma_{R_0}}{R_0^2}\right)^2} = 39.4 \mu F.$$

Unterschiede der Kapazitäten

Uns fiel auf, dass hier die Kapazität des Plattenkondensators in einer ganz anderen Größenordnung als die zuvor berechnete Kapazität liegt.

Eine Antwort auf dieses Problem brachte uns der folgende Artikel:

”Die meisten elektrischen Lasten [...] enthalten eine Reaktanzkomponente. Der reaktive Teil der Last variiert mit der Frequenz. Zum Beispiel nimmt die reaktive Kapazität eines Kondensators mit zunehmender Frequenz ab.”³

Der Unterschied zwischen den Kapazitäten ist also durch die Benutzung des Impulsgebers zu erklären.

4.6 Bestimmung des unbekanntes Widerstandes R_x

Analog zu dem in Kapitel 4.5 beschriebenen Verfahren lässt sich nun auch der unbestimmte Widerstand R_x aus dem Spannungsverlauf (4) bestimmen, wir führen jedoch zuvor die folgende Fehlerabschätzung durch:

Ersetzt man R_E in Gleichung (9) durch R_x , so erhält man

$$\alpha = \beta \left(\frac{R_0}{R_x} + 1 \right).$$

Wird nun R_x immer größer, so folgt $\alpha \approx \beta$ und dadurch wird auch der Fehler immer größer. Es ist bekannt, dass R_x ein sehr großer Widerstand ist, somit würden wir einen enorm großen Fehler erhalten.

Diese Fehlerbetrachtung zeigt, dass es keinen Sinn macht durch den Spannungsverlauf (4) den unbekanntes Widerstand R_x zu bestimmen.

³ Nach <http://www.batteryuniversity.com/parttwo-42A-german.htm>. Aufgerufen am 22. September 2005.

4.7 Kapazität C_{kom} des kommerziellen Kondensators

Wiederrum analog zu Kapitel 4.5 unter der Verwendung von R_0 sind wir nun auch in der Lage aus dem Spannungsverlauf **(7)** die Kapazität C_{kom} des kommerziellen Kondensators zu bestimmen. Wir tragen unsere Messdaten also wieder logarithmisch auf und führen eine lineare Regression durch. Aus der Steigung m dieser Regression erhalten wir

$$C_{kom} = \frac{-m}{R_0} = 319.52 \pm 25.86 \mu F.$$

4.8 Induktivität und Verlustwiderstand der Spulen

Die Spannungsverläufe **(5)** und **(6)** zeigen wie schon erwähnt die Schwingkreise mit der Drossel- und der Luftspule. Daraus soll nun jeweils die Induktivität L und der Verlustwiderstand R bestimmt werden.

Für das logarithmische Dekrement Λ dieser Schwingungen gilt

$$\Lambda = \frac{R}{2L} \cdot T, \quad (10)$$

dabei ist T die Schwingungsdauer. Nach Gleichung (5) und nach den Substitutionen aus (4) folgt nun

$$L = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \beta^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 + \Lambda^2}, \quad (11)$$

dabei ist C die Kapazität des Plattenkondensators.

Um zunächst das logarithmische Dekrement Λ zu berechnen, tragen wir die Maxima der Schwingungen logarithmisch gegen die Zeit auf und führen ein letztes mal lineare Regressionen durch:

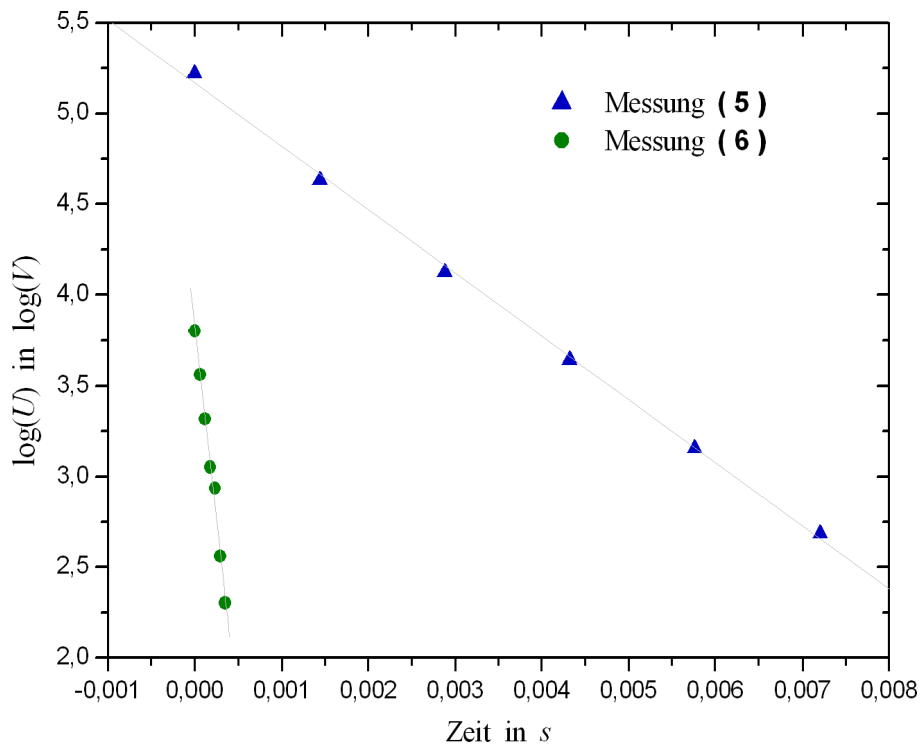


Abbildung 10: Logarithmische Auftragung der Maxima gegen die Zeit.

Durch die Steigungen m ergibt sich nun

$$\Lambda = -m \cdot T$$

mit der Schwingungsdauer T . Wir berechneten:

	T in ms	m in $\log(V)/s$	log. Dekrement Λ
Drosselspule	1.4412	-348.4 ± 6.8	0.502 ± 0.010
Luftspule	0.05788	-4247 ± 170	0.246 ± 0.010

Nach Gleichung (11) kann nun die Induktivität mit dem Fehler

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{T^2 \cdot \sigma_C}{C^2 \cdot (4\pi + \Lambda)}\right)^2 + \left(\frac{T^2 \cdot \sigma_\Lambda}{C \cdot (4\pi + \Lambda)^2}\right)^2}$$

berechnet werden. Weiter erhalten wir danach aus (10) den Verlustwiderstand der Spulen mit dem Fehler

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot L \cdot \sigma_\Lambda}{T}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Lambda \cdot \sigma_L}{T}\right)^2}.$$

Unsere Berechnungen ergaben:

	Induktivität	Verlustwiderstand
Drosselspule	$13.21 \pm 0.02 H$	$9205 \pm 181 \Omega$
Luftspule	$0.0214 \pm 0,0001 H$	$181.9 \pm 7.3 \Omega$

Induktivität der Luftspule aus deren Daten

Die Selbstinduktivität L einer Zylinderspule der Länge $l = 1 m$ mit n Windungen und der Querschnittsfläche A ist⁴

$$L = \mu_0 A l \cdot \left(\frac{n}{l}\right)^2 .$$

Die verwendete Luftspule hatte die Länge $l = 1 m$, sie hatte $n = 2800$ Windungen und einen Durchmesser von $0.0508 m$. Daraus berechnet sich die Induktivität

$$L = 0.01997 H .$$

5 Diskussion

Zunächst einmal ist festzuhalten, dass wir mit der Versuchsdurchführung sehr zufrieden waren, alles lief sehr viel besser und schneller, als erwartet. Dies lag auch an unserem Assistenten, welcher ebenfalls sehr gut vorbereitet war und uns Geräte und Schaltkreise gut erklären konnte – Danke dafür. So waren wir schon während der Durchführung mit unseren Messwerten zufrieden, anders als bei den Versuchen zuvor.

Gerade der Versuchsteil mit dem Ladungsmessgerät lieferte durchweg sehr zufriedenstellende Ergebnisse, es waren nur übliche Messungenauigkeiten der Geräte und geringe äußere Störungen festzustellen.

Auch die Spannungsverläufe als Ausdrücke des Oszilloskops waren wie erwartet, jedoch hatten diese eine so schlechte Auflösung, dass dies zu groben Ablesefehler führte. Somit scheinen unsere Werte zwar nicht schlecht, jedoch nicht so gut wie im vorherigen Versuchsteil zu sein.

Vergleich der Werte für die Kapazität C_{Pl} des Plattenkondensators.

Wir berechneten die Kapazität $C_{Pl} \approx 3.95 nF$ und mit dem Multimeter haben wir eine Kapazität von $C_{Pl} = 4.1 nF$ gemessen. Auch dieses Ergebnis ist also sehr zufriedenstellend.

⁴ Nach P.A. Tipler (2004): "Physik". 1. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Vergleich der Kapazitäten C_{Pl} und C_{kom}

Es ist auffällig, dass die Kapazität C_{Pl} des sehr großen Plattenkondensators ungefähr gleich der Kapazität C_{kom} des kleinen kommerziellen Kondensators ist.

Dies ist dadurch zu erklären, dass bei dem Plattenkondensator Luft als Dielektrikum verwendet wird und dass es sich bei dem kommerziellen Kondensator um einen Folienkondensator handelt, bei welchem Folien eng aufeinander gewickelt wurden. Durch den zusätzlichen Einsatz eines Dielektrikums mit einem sehr hohen Wert für ϵ_r kann somit ein sehr kleiner Kondensator mit vergleichsweise hoher Kapazität hergestellt werden.

Vergleich der Werte für die Induktivität der Luftspule

Die aus dem Spannungsverlauf berechnete Induktivität der Luftspule weicht nur um 7% von der aus den Daten der Spule berechnete Induktivität ab. Der erste Wert wurde über den Ausdruck des Oszilloskops berechnet und weist schon daher einen Ablesefehler auf [siehe oben]. Somit ist auch dies ein super Ergebnis.

Eigene Kommentare

[Versuch sehr spaßig, Auswertung übertrieben. Wir waren auf eine extrem schwierige Auswertung vorbereitet und hatten auch genügend Zeit dafür. Am Ende ist nun meiner Meinung nach sehr super Protokoll bei zustand gekommen, jedoch war der Aufwand enorm. Ich habe sehr viel dabei gelernt und konnte auch alle Auswertungsschritte durchführen, jedoch halte ich eine Auswertung mit einem derart großen Umfang für dieses Praktikum für zu übertrieben. Ich habe mir für dieses Protokoll die Zeit genommen, aber weniger ist manchmal mehr, Herr Schaaf.]_{Daniel}

[Der Versuch war einer der besten den wir bisher hatten, obwohl wir im Vorfeld nur schlechtes gehört hatten. Nachdem alles aufgebaut war, waren die Messungen recht fix durchgeführt. Ich denke es wäre wünschenswert einen Computer beim Versuch stehen zu haben, weil die Auswertung der ausgedruckten Daten ein wenig mühsam ist, und hier auch Fehler durch ungenaues Ablesen zustande kommen. Die Auswertung war nicht so spassig, weil sehr viele Formeln noch hergeleitet werden mussten, und wir Schwingkreise in unserer Physik Vorlesung nur sehr kurz und oberflächlich behandelt haben.]_{Hauke}