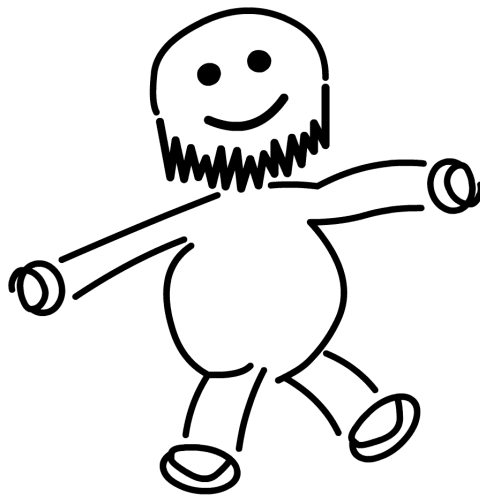


# Medianprobleme in der Ebene mit positiven und negativen Gewichten



Daniel Scholz im Sommer 2005

*Überarbeitete Version vom 23. November 2005.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1 Standortprobleme . . . . .	3
1.2 Normen und Gauges . . . . .	5
1.3 Beispiele für Blocknormen . . . . .	9
<b>2 Medianprobleme ohne verbotene Gebiete</b>	<b>11</b>
2.1 Die Zielfunktion . . . . .	11
2.2 Niveaulinien und Niveaumengen . . . . .	13
2.3 Lösung von Medianproblemen ohne verbotene Gebiete . . . . .	13
2.4 Beispiele . . . . .	15
<b>3 Medianprobleme mit verbotenen Gebieten</b>	<b>20</b>
3.1 Die Haupttechniken . . . . .	20
3.2 Lösung von Medianproblemen mit konvexen verbotenen Gebieten . . . . .	22
3.3 Lösung von Medianproblemen mit polygonartigen verbotenen Gebieten . . . . .	25
3.4 Lösung von Medianproblemen mit dem Komplement von polygonartigen Mengen als verbotenes Gebiet . . . . .	28
<b>4 Aufgaben</b>	<b>29</b>
4.1 Aufgabe 1 . . . . .	29
4.2 Aufgabe 2 . . . . .	30
<b>L Literaturverzeichnis</b>	<b>33</b>

# 1 Grundlagen

## 1.1 Standortprobleme

Standortprobleme sind Optimierungsprobleme, bei denen ein oder mehrere neue Standorte bei vorgegebenen Abstandsfunktionen zu bereits existierenden Standorten unter bestimmten Kriterien [Zielfunktion] gefunden werden sollen.

Jedes Standortprobleme kann durch die folgende Klassifikation beschrieben werden:

### 1.1.1 Klassifikation von Standortproblemen

Für die genaue Klassifikation eines Problems werden 5 Positionen benötigt:

Neue Standorte / Raum / Besonderheiten / Abstandsfunktionen / Zielfunktion

Dabei gilt:

- (1) Neue Standorte sind zum Beispiel ein Punkt,  $N$  Punkte, eine Gerade oder ein Kreis.
- (2) Der Raum, in welchem sich das Problem beschäftigt, ist im Allgemeinen  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , er kann aber auch zum Beispiel ein Netzwerk sein.
- (3) Besonderheiten sind verbotene Gebiete, Barrieren oder Gewichtungen der bereits existierenden Standorten.
- (4) Abstandsfunktionen sind Normen wie der euklidische Abstand, aber auch Gauges [siehe unten] oder in Netzwerken der kürzeste Weg [shortest path].
- (5) Die **Zielfunktion** ist entweder die Summe [Medianproblem] oder das Maximum [Zentrierproblem] über den Abstände der einzelnen existierenden Standorten.

Eine Klasse der Medianproblemen soll nun weiter beschrieben werden:

### 1.1.2 Medianprobleme

Gegeben ist durch  $\{A_1, \dots, A_M\}$  eine endliche Menge von bereits existierenden Standorten im Raum  $\mathbb{R}^2$ , also  $A_m = (a_{m1}, a_{m2}) \in \mathbb{R}^2$  für  $m \in \{1, \dots, M\}$ . Zu jedem Standort  $A_m$  gibt es ein Gewicht  $w_m$  mit  $w_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Es soll nun ein neuer Standort gefunden werden, bei dem die Summe über den Abständen zu den einzelnen existierenden Standorten unter Berücksichtigung der Gewichte minimal ist. Die Zielfunktion ist somit

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sum_{m=1}^M w_m d_m(A_m, x),$$

dabei beschreibt  $d_m$  die Abstandsfunktionen zum Punkt  $A_m$  und somit ist  $d_m(A_m, x)$  der Abstand von  $A_m$  zu  $x$ . Es ergibt sich damit das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in F \subset \mathbb{R}^2} f(x).$$

Ist das Gewicht  $w_m$  zu einem Standort  $A_m$  größer als 0, so soll der neue Standort möglichst nahe an diesem Ort sein. Es gilt für  $w_m > 0$ : je größer  $w_m$ , desto näher soll der neue Standort an  $A_m$  liegen.

Ist  $w_m$  zum Standort  $A_m$  kleiner als 0, so soll der neue Standort möglichst weit weg von  $A_m$  liegen. Es gilt für  $w_m < 0$ : je kleiner  $w_m$ , desto weiter weg soll der neue Standort von  $A_m$  liegen.

Der Bereich  $F \subset \mathbb{R}^2$ , über welchem minimiert werden soll, heißt der **zulässige Bereich**. Beim Medianproblem wird nun  $F = \mathbb{R}^2$  betrachtet. Die Menge der optimalen Lösungen zu  $F = \mathbb{R}^2$  wird mit  $X^*(f)$  bezeichnet.

Wird nun ein zusammenhängende Menge  $R \subset \mathbb{R}^2$  als verbotenes Gebiet definiert, so ergibt sich  $F = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(R)$ , dabei ist  $\text{Int}(R)$  das Innere von  $R$ . In diesem Falle wird die Menge der optimalen Lösungen mit  $X_R^*(f)$  beschrieben.

#### Klassifikation der Medianprobleme

Gilt  $F = \mathbb{R}^2$ , gibt es also kein verbotenes Gebiet, so wird das beschriebene Problem durch

$$1 / \mathbb{R}^2 / w_m \leq 0 / \bullet / \sum$$

klassifiziert. Gibt es ein verbotenes Gebiet  $R$ , so erhält man

$$1 / \mathbb{R}^2 / R, w_m \leq 0 / \bullet / \sum.$$

Um nicht nur Normen als Abstandsfunktionen nutzen zu können, sollen nun gauges eingeführt werden:

## 1.2 Normen und Gauges

Alle folgenden Definitionen und Sätze beziehen sich wie die zu untersuchenden Medianprobleme nur auf den Vektorraum  $\mathbb{R}^2$ , sind jedoch in ähnlicher Art und Weise auch für jeden höherdimensionalen reellen Vektorraum gültig.

### 1.2.1 Definition

Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Norm** auf  $\mathbb{R}^2$ , wenn für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\text{(NOR1)} \quad \|x\| \geq 0.$$

$$\text{(NOR2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{(NOR3)} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$\text{(NOR4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Die Menge  $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$  heißt **Einheitskreis** von  $\|\cdot\|$ .

Insbesondere soll festgehalten werden, dass eine Norm stets symmetrisch ist. Für unser Medianproblem wird jedoch der folgende Begriff eingeführt:

### 1.2.2 Definition

Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  eine kompakte und konvexe Menge mit  $0 \in \text{Int}(B)$ .

Der **gauge**

$$\gamma_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

von  $x \in \mathbb{R}^2$  zu  $B$  wird gegeben durch

$$\gamma_B(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B\}.$$

Ähnlich wie bei der Definition einer Norm heißt hier  $B$  **Einheitskreis**.

Der Abstand  $d(x, y)$  von  $x$  zu  $y$  wird nun durch

$$d(x, y) := \gamma_B(y - x)$$

definiert. Da  $\gamma_B$  aber im Allgemeinen nicht symmetrisch ist, gilt auch anders als bei einer Norm im Allgemeinen  $d(x, y) \neq d(y, x)$ .

**1.2.3 Satz 1**

Sei  $\gamma_B$  ein gauge. Dann gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$  und alle  $\lambda \geq 0$ :

- (1)  $\gamma_B(x) \geq 0$ .
- (2)  $\gamma_B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- (3)  $\gamma_B(\lambda x) = \lambda \gamma_B(x)$ .
- (4)  $\gamma_B(x + y) \leq \gamma_B(x) + \gamma_B(y)$ .

**Beweisskizze**

Die Punkte (1) bis (3) ergeben sich direkt aus der Definition eines gauges und für Punkte (4) muss

$$\frac{x + y}{\gamma_B(x) + \gamma_B(y)} \in B$$

gezeigt werden.

**1.2.4 Satz 2**

Jede Norm definiert auch einen gauge.

Ist  $B$  eine kompakte, konvexe und punktsymmetrische Menge, dann definiert der gauge  $\gamma_B$  auch eine Norm.

**Beweis**

Der Einheitskreis  $B$  einer Norm ist stets kompakt, konvex und es gilt  $0 \in \text{Int}(B)$ . Somit definiert eine Norm auch einen gauge  $\gamma_B$ .

Ist  $\gamma_B$  ein gauge und ist  $B$  punktsymmetrisch, so gilt nach Satz 1.2.3 für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\gamma_B(\lambda x) = |\lambda|x,$$

somit werden alle Axiome einer Norm erfüllt und der gauge  $\gamma_B$  ist sogar eine Norm. □

**1.2.5 Satz 3**

Sei  $\gamma_B$  ein gauge.

Dann ist  $\gamma_B(x)$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  eine konvexe Funktion.

**Beweis**

Es ist für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$  und alle  $\lambda \in ]0, 1[$  zu zeigen, dass

$$\gamma_B(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\gamma_B(x) + (1 - \lambda)\gamma_B(y)$$

gilt. Nach Satz 1.2.3 folgt aber sofort

$$\gamma_B(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \gamma_B(\lambda x) + \gamma_B((1 - \lambda)y) = \lambda\gamma_B(x) + (1 - \lambda)\gamma_B(y),$$

womit die Behauptung schon gezeigt wurde.  $\square$

**1.2.6 Polyedrische gauges**

Sei  $\gamma_B$  ein gauge und sei  $B$  zusätzlich ein Polyeder. Dann heißt  $\gamma_B$  **polyedrischer gauge**. Ist  $B$  auch noch symmetrisch, so heißt  $\gamma_B$  eine **Blocknorm**.

Die Vektoren zu den Extrempunkte [Ecken]

$$\text{ext}(B) = \{e_1, \dots, e_k\}$$

von  $B$  heißen **Fundamentalvektoren** von  $\gamma_B$ .

Die Halbgeraden  $d_1, \dots, d_k$  mit

$$d_i = \{\lambda e_i \mid \lambda \geq 0\} \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

heißen die **Fundamentalrichtungen** von  $\gamma_B$ .

Es sei  $e_{k+1} := e_1$  sowie  $d_{k+1} := d_1$ . Die Fundamentalvektoren  $e_g$  und  $e_{g+1}$  erzeugt dann durch

$$C(e_g, e_{g+1}) := \{\alpha e_g + \beta e_{g+1} \mid \alpha, \beta \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

den **Fundamentalkegel**  $C(e_g, e_{g+1})$ .

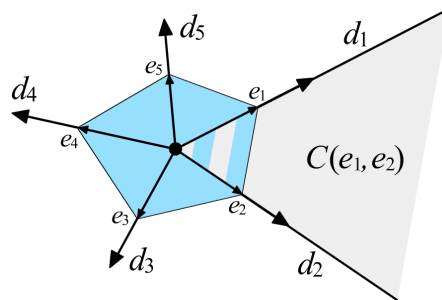


Abbildung 1: Fundamentalkegel eines polyedrischen gauges.

### 1.2.7 Satz 4

Sei  $\gamma_B$  ein polyedrischer gauge im  $\mathbb{R}^2$  und sei  $x \in \mathbb{R}^2$  mit

$$x = \lambda_g e_g + \lambda_{g+1} e_{g+1} \in C(e_g, e_{g+1})$$

im Fundamentalkegel von  $e_g$  und  $e_{g+1}$  enthalten. Dann gilt

$$\gamma_B(x) = \lambda_g + \lambda_{g+1}.$$

#### Beweis

Es gilt  $x \in C(e_g, e_{g+1})$ , somit folgt  $\lambda_g, \lambda_{g+1} \geq 0$ .

Sei nun  $z$  der Schnittpunkt vom Rand von  $B$  mit Halbgeraden von 0 durch  $x$ :

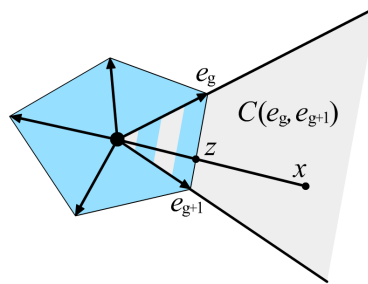


Abbildung 2: Definition vom Punkt  $z$ .

Dann gilt  $x = \gamma_B(x)z$ , da  $\gamma_B(x)$  der Abstand von  $x$  zu 0 ist und  $z$  die Richtung vorgibt. Weiter gilt

$$z = \alpha e_g + (1 - \alpha)e_{g+1}$$

für [mindestens] ein  $\alpha \in [0, 1]$ . Der Punkt  $x$  kann somit auf zwei unterschiedliche Weisen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_g e_g + \lambda_{g+1} e_{g+1}, \\ x &= \gamma_B(x)z = \gamma_B(x)\alpha e_g + \gamma_B(x)(1 - \alpha)e_{g+1}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man nun

$$\lambda_g = \gamma_B(x)\alpha \quad \text{und} \quad \lambda_{g+1} = \gamma_B(x)(1 - \alpha) = \gamma_B(x) - \gamma_B(x)\alpha,$$

daraus ergibt sich sofort  $\gamma_B(x) = \lambda_g + \lambda_{g+1}$ .  $\square$

### 1.2.8 Satz 5

Jeder polyedrische gauge  $\gamma_B$  im  $\mathbb{R}^2$  ist linear über jedem Fundamentalkegel  $C(e_g, e_{g+1})$ .



**Beweis**

Die Behauptung ergibt sich aus Satz 1.2.7:

Seien  $x, y \in C(e_g, e_{g+1})$  beliebig mit

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 e_g + \mu_1 e_{g+1} \in C(e_g, e_{g+1}) & \text{und} \\ y &= \lambda_2 e_g + \mu_2 e_{g+1} \in C(e_g, e_{g+1}), \end{aligned}$$

es gilt dabei stets  $\lambda_i, \mu_i \geq 0$  für  $i = 1, 2$ .

Es ist nun auch

$$(x + y) = (\lambda_1 + \lambda_2)e_g + (\mu_1 + \mu_2)e_{g+1} \in C(e_g, e_{g+1})$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \gamma_B(x + y) &= (\lambda_1 + \lambda_2) + (\mu_1 + \mu_2) \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) + (\lambda_2 + \mu_2) = \gamma_B(x) + \gamma_B(y). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.3 gilt für alle  $\lambda \geq 0$  sofort

$$\gamma_B(\lambda x) = \lambda x,$$

womit die Behauptung gezeigt wurde. □

## 1.3 Beispiele für Blocknormen

Es sollen nun noch die beiden wichtigsten Blocknormen im  $\mathbb{R}^2$  vorgestellt werden:

### 1.3.1 Maximumsnorm

Die Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  und die gewichtete Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty^w$  für  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  werden definiert durch

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &:= \max_{i=1,2} |x_i|, \\ \|x\|_\infty^w &:= \max_{i=1,2} w_i |x_i|, \end{aligned}$$

dabei gilt  $w_1, w_2 > 0$ .

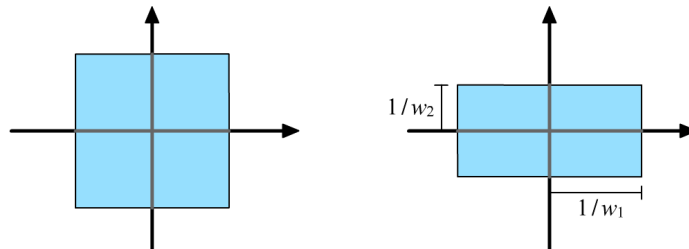


Abbildung 3: Einheitskreise der Maximumsnorm.

Die Fundamentalvektoren von  $\|\cdot\|_\infty$  im  $\mathbb{R}^2$  sind somit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die gewichtete Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty^w$  folgt

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1/w_1 \\ 1/w_2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1/w_1 \\ -1/w_2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1/w_1 \\ -1/w_2 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} -1/w_1 \\ 1/w_2 \end{pmatrix}.$$

### 1.3.2 Manhattan Norm

Die Manhattan Norm  $\|\cdot\|_1$  und die gewichtete Manhattan Norm  $\|\cdot\|_1^w$  für  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  werden definiert durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1,2} |x_i|,$$

$$\|x\|_1^w := \sum_{i=1,2} w_i |x_i|,$$

dabei gilt wieder  $w_1, w_2 > 0$ .

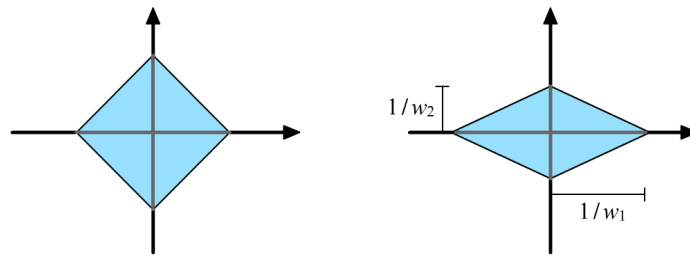


Abbildung 4: Einheitskreise der Manhattan Norm.

Die Fundamentalvektoren von  $\|\cdot\|_1$  im  $\mathbb{R}^2$  sind somit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die gewichtete Manhattan Norm  $\|\cdot\|_1^w$  folgt

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/w_2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1/w_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/w_2 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} -1/w_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 2 Medianprobleme ohne verbotene Gebiete

Sei also wieder  $\{A_1, \dots, A_M\}$  eine endliche Menge von bereits existierenden Standorten im  $\mathbb{R}^2$  mit  $A_m = (a_{m1}, a_{m2})$  für  $m = 1, \dots, M$ . Jeder Standort hat ein positives oder negatives Gewicht  $w_m$  und als Abstandsfunktionen besitzt jeder Standort einen eigenen polyedrischen gauge

$$\gamma_m(x) := \gamma_{B_m}(x).$$

Die Zielfunktion, welche minimiert werden soll, ist somit

$$f(x) = \sum_{m=1}^M w_m \gamma_m(x - A_m).$$

Es sollen nun Medianprobleme ohne verbotene Gebiete gelöst werden, bei denen jeder existierende Standort  $A_m$  einen eigenen polyedrischen gauge hat:

$$1 / \mathbb{R}^2 / w_m \leq 0 / \gamma / \Sigma.$$

### 2.1 Die Zielfunktion

Die Zielfunktion kann nun beschrieben werden durch

$$f(x) := f_1(x) - f_2(x)$$

mit

$$f_1(x) = \sum_{m \in \mathcal{M}^+} w_m \gamma_m(x - A_m) \quad \text{und} \quad f_2(x) = \sum_{m \in \mathcal{M}^-} (-w)_m \gamma_m(x - A_m)$$

mit  $\mathcal{M}^+ := \{m \mid w_m > 0\}$  und  $\mathcal{M}^- := \{m \mid w_m < 0\}$ .

#### 2.1.1 Satz 1

Die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  sind konvex.

**Beweis**

Nach Satz 1.2.5 auf Seite 6 ist auch  $\gamma_m(x - A_m)$  für alle  $m = 1, \dots, M$  konvex.

Da Linearkombinationen von konvexen Funktionen mit positiven Koeffizienten wieder konvex sind, sind  $f_1$  und  $f_2$  konvex.  $\square$

Sind nun die Indexmengen  $\mathcal{M}^+$  und  $\mathcal{M}^-$  beide nicht leer, so ist die Zielfunktion  $f$  weder konvex noch konkav, somit können mehrere lokale Minima existieren und es muss das globale Minimum gefunden werden. Es sei jedoch festgehalten, dass  $f$  stets stetig ist.

Zunächst einmal sollen die folgenden beiden Erkenntnisse festgehalten werden:

**2.1.2 Satz 2**

Sei

$$W := \sum_{m=1}^M w_m.$$

Dann gilt:

- (1) Für  $W > 0$  sind die optimalen Standorte begrenzt.
- (2) Für  $W < 0$  liegen die optimalen Standorte im Unendlichen.
- (3) Für  $W = 0$  kann kein allgemeines Resultat angegeben werden.

**Beweisidee**

Betrachtet man einen neuen Standort  $x$ , der von allen bereits existierenden Standorten  $A_1, \dots, A_m$  sehr weit entfernt ist, so kann man sich all diese Standorte als einen einzigen Standort  $A$  mit dem Gewicht  $W$  vorstellen. Dieser Situation nähert man sich genau dann an, wenn  $x$  immer weiter ins Unendliche verschoben wird.



Abbildung 5: Verschiebung des neuen Standortes  $x$ .

Für  $W < 0$  sind die optimale Standorte somit im Unendlichen und für  $W > 0$  möglichst in der Nähe der existierenden Standorte zu finden.

Ein exakter Beweis ist in [2] zu finden.

Bei Medianprobleme ohne verbotene Gebiete müssen also nur Probleme betrachtet werden, bei denen  $W \geq 0$  gilt.

### 2.1.3 Bemerkung

Gibt es ein  $m^* \in \{1, \dots, M\}$  mit

$$w_{m^*} \geq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq m^*}}^M |w_m|,$$

dann ist  $A_{m^*}$  der optimale Standort.

Ein Beweis dieser Bemerkung wurde in [1] geführt.

## 2.2 Niveaulinien und Niveaumengen

### 2.2.1 Definition

Sei  $f$  die übliche Zielfunktion wie oben.

Die *Niveaulinie* von  $f$  bezüglich  $z \in \mathbb{R}$  ist

$$L_=(z) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = z\}.$$

Die *Niveaumenge* von  $f$  bezüglich  $z \in \mathbb{R}$  ist

$$L_{\leq}(z) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq z\}.$$

Nach dieser Definition gilt also:

### 2.2.2 Satz 1

$z^*$  ist genau dann der Zielfunktionswert einer optimalen Lösung für das Problem  $1/\mathbb{R}^2/w_m \leq 0/\bullet/\bullet$ , wenn

$$z^* = \min\{z \in \mathbb{R} \mid L_=(z) \neq \emptyset\}$$

gilt.

## 2.3 Lösung von Medianproblemen ohne verbotene Gebiete

### 2.3.1 Definition

Es sei nun  $G(m)$  die Anzahl der Fundamentalvektoren zum polyedrischen gauge  $\gamma_m$ . Ist  $\gamma_m$  zum Beispiel die Maximumsnorm, so gilt  $G(m) = 4$ . Weiter

bezeichne  $C^m(e_g, e_{g+1})$  einen Fundamentalkegel von  $\gamma_m$ .

Sei weiter  $\pi = (p_m)_{m=1, \dots, M}$  eine Familie von  $M$  natürlichen Zahlen mit

$$p_m \in \{1, \dots, G(m)\} \quad \text{für } m = 1, \dots, M$$

und sei

$$C_\pi := \bigcap_{m=1}^M C^m(e_{p_m}, e_{p_m+1}).$$

Eine konvexe Menge  $C$  mit  $\text{Int}(C) \neq \emptyset$  heißt eine **Zelle**, wenn es eine Familie  $\pi$  gibt, so dass  $C = C_\pi$  gilt.

Die Menge aller Zellen wird mit  $\mathcal{C}$  bezeichnet.

Nach Definition gilt sofort  $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ .

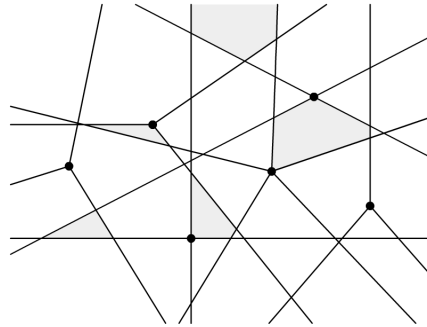


Abbildung 6: Beispiel einer Menge  $\mathcal{C}$ .

Geometrisch erhält man alle Zellen, wenn man die Fundamentalrichtungen zu den gauges  $\gamma_m$  für  $m = 1, \dots, M$  zeichnet [siehe Abbildung 6].

### 2.3.2 Satz 1

Die Zielfunktion  $f(x)$  mit polyedrischen gauges  $\gamma_m$  ist in jeder Zelle  $C \in \mathcal{C}$  [affin] linear.

#### Beweis

Nach Satz 1.2.8 auf Seite 8 gilt, dass  $\gamma_m(x)$  in jedem Fundamentalkegel  $C^m(e_g, e_{g+1})$  linear ist. Da jede Zelle die Vereinigung von Fundamentalkegeln ist, ist  $\gamma_m(x)$  auch in jeder Zelle  $C \in \mathcal{C}$  linear.

Für alle  $x$  aus einer beliebigen Zelle  $C$  gibt es also in  $x$  lineare Funktionen  $l_m$  mit

$$f(x) = \sum_{m=1}^M w_m l_m(x - A_m).$$

Es folgt nun, dass  $f(x)$  in jeder Zelle  $C$  [affin] linear ist. □

Insbesondere sind also die Niveaulinien von  $f(x) = z$  in jeder Zelle linear. Es ergibt sich nun das zunächst wichtigste Ergebnis:

### 2.3.3 Satz 2

Für eine zusammenhängende Menge aus  $X \subset X^*(f)$  mit dem Niveau  $z \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $X$  ist eine komplette Zelle oder
- (2)  $X$  ist eine Kante einer Zelle oder
- (3)  $X$  ist ein Extrempunkt einer Zelle.

#### Beweis

Die Behauptung folgt direkt, da die Zielfunktion  $f(x)$  stetig und nach dem vorherigen Satz 2.3.2 auch zellenweise linear ist.  $\square$

Für den Fall  $W > 0$  müssen also nur die Extrempunkte von allen Zellen untersucht werden, um  $X^*(f)$  bestimmen zu können.

### 2.3.4 Definition

Sei

$$H := \bigcup_{m=1}^M \left( \bigcup_{g=1}^{G(m)} d_g^m \right) \subset \mathbb{R}^2,$$

dabei ist  $d_g^m$  eine Fundamentalrichtung von  $\gamma_m$ . Die Menge  $H$  beschreibt also die Vereinigung von den Fundamentalrichtungen von den gauges  $\gamma_m$  der Standorte  $A_1, \dots, A_M$ .

Weiter sei  $I$  die Menge aller Schnittpunkte, die durch  $H$  erzeugt werden. Somit ist  $I$  auch die Menge aller Extrempunkte von allen Zellen.

## 2.4 Beispiele

### 2.4.1 Beispiel 1

Es seien die drei existierenden Standorte

$$A_1 = (3, 3), \quad A_2 = (3, 8) \quad \text{und} \quad A_3 = (7, 5)$$

mit den Gewichten

$$w_1 = -1, \quad w_2 = 0.9 \quad \text{und} \quad w_3 = 1$$

gegeben.

Es gilt  $W = 0.9$ , die optimalen Standorte  $X^*(f)$  sind also begrenzt.

Jeder Standort besitzt einen eigenen gauge, welcher durch die Extrempunkte von  $B_m$  für  $m = 1, \dots, 3$  gegeben wird:

$$\text{ext}(B_1) = \{(1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)\},$$

$$\text{ext}(B_2) = \{(0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)\},$$

$$\text{ext}(B_3) = \{(0.5, 0.5), (0.5, -0.5), (-0.5, -0.5), (-0.5, 0.5)\}.$$

In diesem Falle gilt also gerade

$$\gamma_1(x) = \|x\|_\infty, \quad \gamma_2(x) = \|x\|_1 \quad \text{und} \quad \gamma_3(x) = 2\|x\|_\infty.$$

Die folgende Abbildung soll das gegebene Beispiel verdeutlichen:

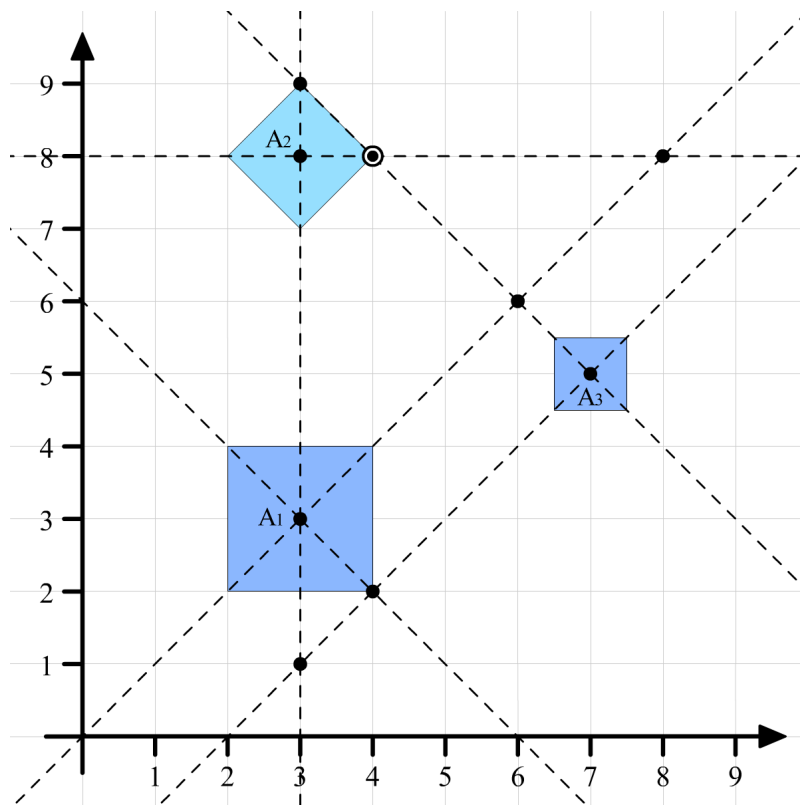


Abbildung 7: Standortproblem ohne verbotenem Gebiet zu Beispiel 1.

Um die optimalen Standorte  $X^*(f)$  zu finden, müssen nun die Extrempunkte aus  $I$  untersucht werden:

$x \in I$	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)	(4, 2)	(4, 8)	(6, 6)	(7, 5)	(8, 8)
$f(x)$	12.3	12.5	3	11.3	<b>1.9</b>	3.5	2.3	5.5
$x \in I$	(10, 8)	(-2, 8)	(3, 9)					
$f(x)$	5.3	17.5	2.9					



Anhand der Tabelle erkennt man, dass die optimale Lösung ein einzelner Punkt ist:

$$X^*(f) = \{(4, 8)\}.$$

Die folgende Abbildung zeigt die Zielfunktion  $f(x)$  und soll die zellenweise Linearität verdeutlichen:

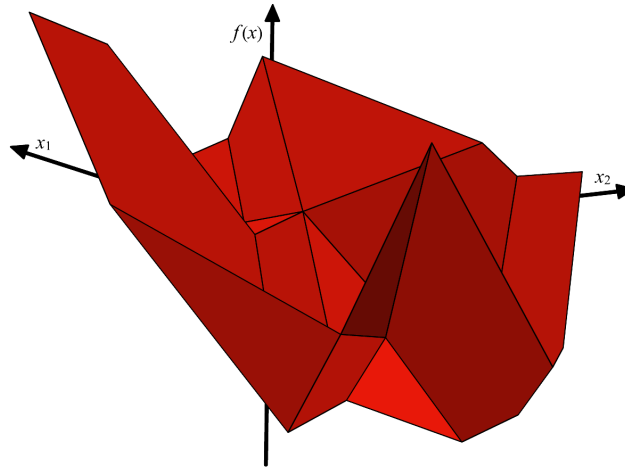


Abbildung 8: Zielfunktion zu Beispiel 1.

**Andere Gewichte**

Nutzt man das gleiche Beispiel und verändert nur die Gewichte zu

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1.5 \quad \text{und} \quad w_3 = 1,$$

so erhält man folgende Werte:

$x \in I$	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)	(4, 2)	(4, 8)	(6, 6)	(7, 5)	(8, 8)
$f(x)$	20.5	15.5	13	17.5	<b>12.5</b>	<b>12.5</b>	14.5	18.5
$x \in I$	(10, 8)	(-2, 8)	(3, 9)					
$f(x)$	23.5	30.5	15.5					

Die optimalen Standpunkte liegen demnach alle auch der Kante einer Zelle:

$$X^*(f) = \{\lambda(4, 8) + (1 - \lambda)(6, 6) \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

**2.4.2 Beispiel 2**

Es seien die vier existierenden Standorte

$$A_1 = (3, 2), \quad A_2 = (2, 8), \quad A_3 = (6, 6) \quad \text{und} \quad A_4 = (8, 4)$$

gegeben. Alle vier Standorte haben das Gewicht 1 und alle vier Standorte haben als gauge die Manhattan Norm, also

$$w_m = 1 \quad \text{und} \quad \gamma_m(x) = \|x\|_1 \quad \text{für } m = 1, \dots, 4.$$

Die folgende Abbildung soll das gegebene Beispiel wieder verdeutlichen:

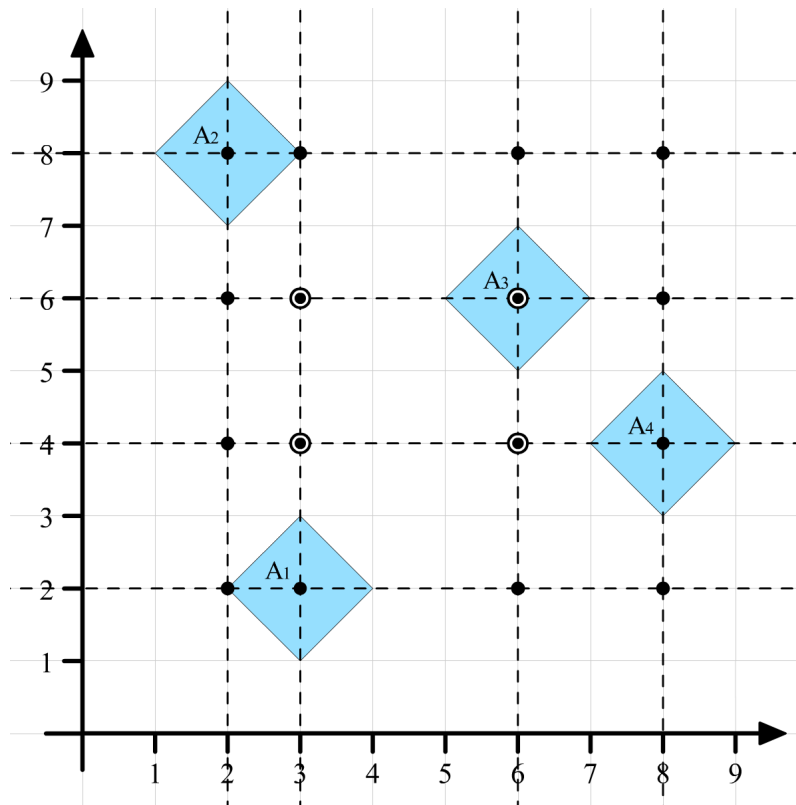


Abbildung 9: Standortproblem ohne verbotenem Gebiet zu Beispiel 2.

Es gilt offenbar  $W > 0$  und die Funktionswerte der Extrempunkte aus  $I$  sind in folgender Tabelle dargestellt:

$x \in I$	(2, 2)	(2, 4)	(2, 6)	(2, 8)	(3, 2)	(3, 4)	(3, 6)	(3, 8)
$f(x)$	23	19	19	23	21	<b>17</b>	<b>17</b>	21
$x \in I$	(6, 2)	(6, 4)	(6, 6)	(6, 8)	(8, 2)	(8, 4)	(8, 6)	(8, 8)
$f(x)$	21	<b>17</b>	<b>17</b>	21	25	21	21	25

Die optimalen Standorte befinden sich somit in einer gesamten Zelle:

$$X^*(f) = [3, 6] \times [4, 6] \subset \mathbb{R}^2.$$

Die folgende Abbildung zeigt wieder die Zielfunktion  $f(x)$ . Es ist gut zu erkennen, dass  $X^*(f)$  nicht nur ein Punkt sondern eine ganze Zelle ist:

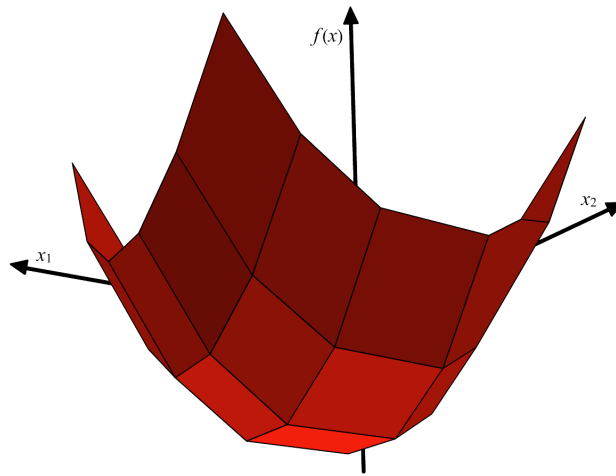


Abbildung 10: Zielfunktion zu Beispiel 2.

## 3 Medianprobleme mit verbotenen Gebieten

Der zulässige Bereich sei nun  $F = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(R)$ , dabei ist  $R \subset \mathbb{R}^2$  eine zusammenhängende Menge, nämlich genau das verbotene Gebiet.

### 3.1 Die Haupttechniken

Nach der Definition von Niveaulinien gilt zunächst wieder:

#### 3.1.1 Satz 1

$z_F^*$  ist genau dann der Zielfunktionswert einer optimalen Lösung für das Problem  $1/\mathbb{R}^2/R, w_m \leq 0/\bullet/\bullet$ , wenn

$$z_F^* = \min\{z \in \mathbb{R} \mid L_=(z) \cap F \neq \emptyset\}$$

gilt.

#### 3.1.2 Satz 2

Die Niveaumenge  $L_{\leq}(z)$  für die Zielfunktion  $f(x) = z$  sind von folgender Gestalt:

- (1) Für  $W > 0$  sind die Niveaulinien  $L_=(z)$  geschlossene Polygone und die dazugehörige Niveaumenge  $L_{\leq}(z)$  sind die durch die Niveaulinie  $L_=(z)$  begrenzte, abgeschlossene Mengen.
- (2) Für  $W < 0$  sind die Niveaulinien  $L_=(z)$  geschlossene Polygone und die dazugehörige Niveaumenge  $L_{\leq}(z)$  ist die Menge, die sich durch das Äußere der Niveaulinie  $L_=(z)$  ergibt.

Es ist also  $L_{\leq}(z) = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(L_{\leq}^-(z))$ , dabei ist  $L_{\leq}^-(z)$  die Niveaumenge von  $-f(x)$ .

**Beweis**

Zunächst zu  $W > 0$ . Nach Satz 2.1.2 auf Seite 12 sind die optimalen Standorte begrenzt und nach Satz 2.3.3 auf Seite 15 ist die Struktur der optimalen Lösungen bekannt.

Nach der zellenweisen Linearität der Niveaulinien aus Satz 2.3.2 auf Seite 14 und der Begrenztheit der optimalen Lösungen müssen die Niveaulinien aus geschlossenen Polygonen bestehen, die die optimalen Lösungen einschließen. Die Niveaumengen müssen nun die optimalen Lösungen enthalten, also bestehen sie aus den Inneren und den Rändern der Polygone.

Nun zu  $W < 0$ . Dazu wird die Zielfunktion  $f(x)$  mit  $-1$  multipliziert, dann erhält man  $W > 0$  und befindet sich im vorherigen Falle. Da  $-f(x) \geq z$  äquivalent zu  $f(x) \leq -z$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung**

Für den Fall  $W = 0$  kann auch hier wieder keine Aussage gemacht werden.

**3.1.3 Satz 3**

$x \in X_R^*(f)$  ist genau dann eine optimale Lösung von

$$1 / \mathbb{R}^2 / R, w_m \leq 0 / \gamma_m / \Sigma$$

mit  $f(x) = z$ , wenn es ein  $z \in \mathbb{R}$  gibt, so dass mindestens eine der folgenden Aussagen erfüllt wird:

**(1)** Es gilt  $x \in X^*(f) \cap F$  und  $z = \min\{f(y) \mid y \in X^*(f) \cap F\}$ .

**(2)** Es gilt  $L_=(z) \cap \partial R \neq \emptyset$  und  $L_<(z) \subset R$ .

**Beweis**

Ist Punkt **(1)** erfüllt, so ist  $x$  direkt eine optimale Lösung.

Durch die zellenweise Linearität der Niveaulinien aus Satz 2.3.2 und nach dem vorherigen Satz 3.1.2 lässt sich folgern, dass

$$\text{Int}(L_<(z)) = L_<(z) \quad \text{für } z > z^*$$

gilt, dabei ist  $z^*$  das Minimum von  $f$ .

Angenommen es gilt nun **(2)** und es gibt kein  $x \in X^*(f)$ , dass **(1)** erfüllt. Dann sind alle Niveaumengen mit einem kleineren Niveau als  $z$  unmöglich und alle Niveaumengen mit einem größeren Niveau als  $z$  sind nicht optimal, also sind alle  $x$  mit  $f(x) = z$  optimale Lösungen.

Es reichen somit **(1)** oder **(2)** aus, damit  $x$  ein optimaler Standort ist.

Sei nun umgekehrt angenommen, dass  $x$  eine optimale Lösung mit  $f(x) = z$  ist und weder **(1)** noch **(2)** erfüllt wird. Dann kann es keine bessere Lösung  $y \in X^*(f)$  geben, da sonst **(1)** erfüllt wäre. Mit  $x \in F$  und dadurch, dass **(2)** nicht erfüllt wird, folgt

$$\text{Int}(L_{\leq}(z)) \cap \partial R \neq \emptyset.$$

Demnach gibt es dann aber Punkte auf dem Rand von  $R$ , die ein besseres Niveau als  $f(x)$  haben und somit kann  $x$  auch nicht optimal sein.  $\square$

Es ist nun also bekannt, dass eine optimale Lösung  $x$  eines Standortproblems mit verbotenen Gebiet  $R$  entweder in der gleichen Niveaumenge liegt, wie das selbe Standortproblem ohne dem verbotenen Gebiet  $R$ , oder dass  $x$  auf dem Rand von  $R$  liegt.

### 3.2 Lösung von Medianproblemen mit konvexen verbotenen Gebieten

#### 3.2.1 Satz 1

Sei  $R$  eine konvexes verbotenes Gebiet, sei  $X^*(f) \cap F = \emptyset$  und sei  $W > 0$ .

Dann gibt es einen optimalen Standort  $x^* \in X_R^*(f)$  mit  $x^* \in H \cap \partial R$  oder mit  $x^* \in I \cap F$ .

#### Beweis

Nach Satz 3.1.3 gilt entweder  $x^* \in I \cap F$  oder  $x^* \in \partial R$ . Es muss also nur gezeigt werden, dass wenn  $x^*$  auf dem Rand von  $R$  liegt, dass dann auch  $x^* \in H \cap \partial R$  gilt.

Sei also nun  $x^* \in \partial R$  und sei  $L_{=}(z^*)$  die Niveaulinie durch  $x^*$ , also  $f(x^*) = z^*$ . Nach Satz 3.1.2 ist bekannt, dass  $L_{=}(z^*)$  ein Polygon ist. Liegt  $x^*$  an einer Ecke von  $L_{=}(z^*)$ , so gilt auch  $x^* \in H$  und die Behauptung ist klar. Anderenfalls sei nun  $L$  das lineare Segment von  $L_{=}(z^*)$  mit  $x^* \in L$ .

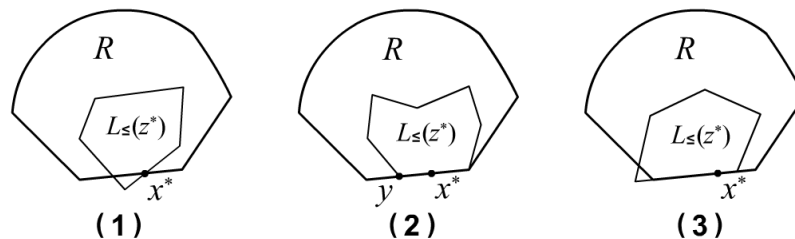


Abbildung 11: Verdeutlichung möglicher Niveaulinien.

In dieser Situation gibt es nun drei Möglichkeiten [siehe Abbildung 11]:

- (1)  $L$  kreuzt den Rand  $\partial R$  von  $R$  und somit gilt  $L_{\leq}(z^*) \not\subset R$ . Demnach kann  $x^*$  nicht optimal sein.
- (2)  $L$  unterstützt den Rand  $\partial R$  von  $R$  in  $x^*$  und es gilt  $L \subset R$ . Dann gibt es auch einen Punkt  $y \in L$ , der eine Ecke von  $L_{\leq}(z^*)$  ist. Da  $y$  nun den selben Zielfunktionswert wie  $x^*$  hat, kann  $x^*$  durch  $y$  ersetzt werden und es gilt dann  $x^* \in H$ .
- (3)  $L$  unterstützt den Rand  $\partial R$  von  $R$  in  $x^*$  und es gilt  $L \not\subset R$ . Dann gilt wieder  $L_{\leq}(z^*) \not\subset R$  und somit kann  $x^*$  nicht optimal sein.  $\square$

Aus diesem Satz ergibt sich nun ein Algorithmus zur Berechnung der optimalen Standorte:

### 3.2.2 Algorithmus 1

#### Input

Medianproblem mit konvexen verbotenen Gebiet  $R$ .

#### Berechnung

- (1) Wenn  $X^*(f) \cap F \neq \emptyset$ , dann  $X_R^*(f) = X^*(f) \cap F$  und STOP.
- (2) Berechnung von  $H$ .
- (3) Bestimmung von  $I \cap F = \{x_1, \dots, x_l\}$ .
- (4) Bestimmung von  $H \cap \partial R = \{y_1, \dots, y_k\}$ .
- (5) Finde  $x^* \in \operatorname{argmin}\{f(x_1), \dots, f(x_l), f(y_1), \dots, f(y_k)\}$ .

#### Output

Wenn  $x^* \notin I \cap R$ , dann

$$X_R^*(f) = L_{\leq}(f(x^*)) \cap \partial R,$$

sonst

$$X_R^*(f) = L_{\leq}(f(x^*)) \cap F.$$

### 3.2.3 Beispiel

Es werden wieder die Standorte

$$A_1 = (3, 3), \quad A_2 = (3, 8) \quad \text{und} \quad A_3 = (7, 5)$$

mit den Gewichten

$$w_1 = -1, \quad w_2 = 0.9 \quad \text{und} \quad w_3 = 1$$

und mit den gauges

$$\gamma_1(x) = \|x\|_\infty, \quad \gamma_2(x) = \|x\|_1 \quad \text{und} \quad \gamma_3(x) = 2\|x\|_\infty.$$

wie aus Beispiel 2.4.1 auf Seite 15 verwendet.

Hinzu kommt nun das konvexe verbotene Gebiet  $R = [3.5, 6.5] \times [5, 9]$ , wie in der folgende Abbildung verdeutlicht:

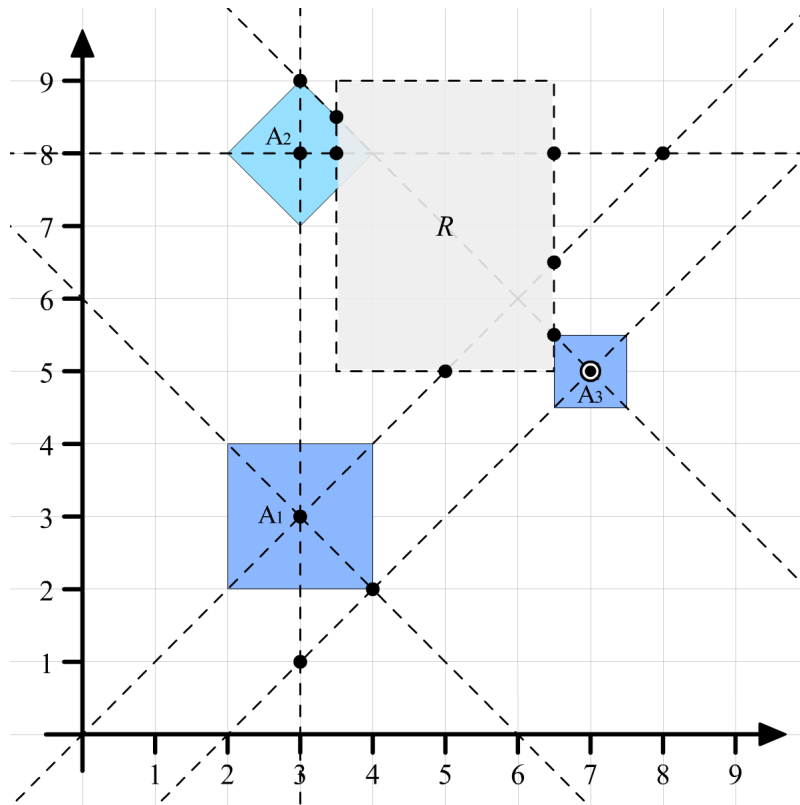


Abbildung 12: Standortproblem mit konvexem verbotenen Gebiet.

Um die optimalen Standorte  $X^*(f)$  zu finden, müssen die Punkte  $x$  aus  $I \cap F$  sowie aus  $H \cap \partial R$  untersucht werden:

$x$	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)	(4, 2)	(3.5, 8)	(3.5, 8.5)
$f(x)$	12.3	12.5	3	11.3	2.45	2.4
$x$	(7, 5)	(8, 8)	(10, 8)	(-2, 8)	(3, 9)	(5, 5)
$f(x)$	<b>2.3</b>	5.5	5.3	17.5	2.9	6.5
$x$	(6.5, 5.5)	(6.5, 6.5)	(6.5, 8)			
$f(x)$	2.9	4	4.15			



Anhand der Tabelle erkennt man, dass die optimale Lösung nun der Punkt  $A_3 = (7, 5)$  ist:

$$X^*(f) = \{(7, 5)\}.$$

### 3.3 Lösung von Medianproblemen mit polygonartigen verbotenen Gebieten

#### 3.3.1 Satz 1

Sei  $R = P$  eine polygonartiges verbotenes Gebiet, sei  $X^*(f) \cap F = \emptyset$ , sei  $W > 0$  und sei  $V(P) = \{v_1, \dots, v_n\}$  die Menge aller Ecken von  $P$ .

Dann gibt es einen optimalen Standort  $x^* \in X_R^*(f)$  mit  $x^* \in H \cap \partial R$  oder mit  $x^* \in I \cap F$  oder mit  $x^* \in V(P)$ .

#### Beweis

Sei  $z^* = f(x^*)$  und sei  $x^* \in \partial R \cap L_=(z^*)$ , dies ist nach Satz 3.1.3 eine Bedingung an ein optimalen Standort mit einem verbotenen Gebiet  $R$ .

Sei weiter  $C \in \mathcal{C}$  mit  $x^* \in C$ , sei  $L_C = L_=(z^*) \cap C$  und sei  $P_{v_i v_{i+1}}$  die Kante des Polygons, die  $v_i$  mit  $v_{i+1}$  verbindet, dabei gilt wieder  $v_{n+1} = v_1$ .

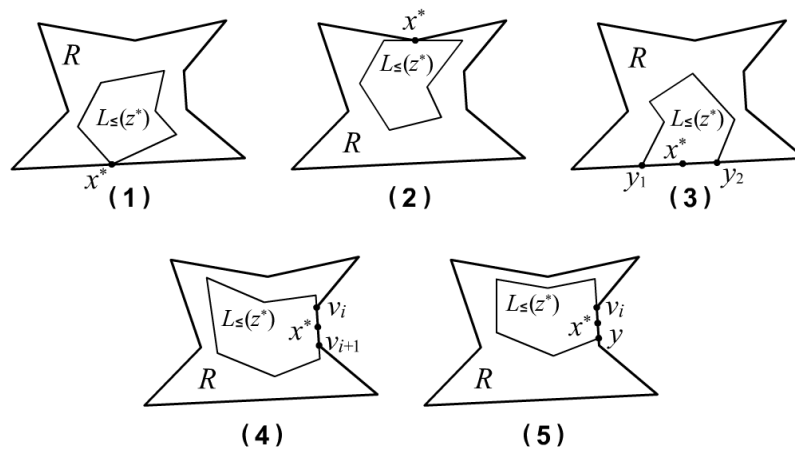


Abbildung 13: Mögliche optimale Standorte  $x^*$ .

Da  $X^*(f) \cap F = \emptyset$  gilt, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten für  $x^*$  [siehe Abbildung 13]:

- (1)  $x^*$  liegt an einer Ecke der polygonartigen Niveaumenge  $L_{\leq}(z^*)$ , somit gilt  $x^* \in H$ .
- (2)  $x^*$  ist eine Ecke von  $P$ , also  $x^* \in V(P)$ .

- (3)  $L_C$  ist eine Hilfslinie entlang einer Kante von  $P$  mit  $x^* \in L_C$  und  $L_C \subset P_{v_i v_{i+1}}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gibt es zwei Punkte  $y_1$  und  $y_2$  mit  $y_1, y_2 \in L_=(z^*) \cap \partial R$ , welche jeweils an einer Ecke der Niveaumenge  $L_{\leq}(z^*)$  liegen. Somit kann  $x^*$  durch  $y_1$  oder durch  $y_2$  ersetzt werden und es gilt dann  $x^* \in H$ .
- (4)  $L_C$  ist eine Hilfslinie entlang einer Kante von  $P$  mit  $x^* \in L_C$  und  $P_{v_i v_{i+1}} \subset L_C$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann kann  $x^*$  durch  $v_i$  oder durch  $v_{i+1}$  ersetzt werden.
- (5)  $L_C$  ist eine Hilfslinie entlang einer Kante von  $P$  mit  $x^* \in L_C$ , aber es gilt weder  $P_{v_i v_{i+1}} \subset L_C$  noch  $L_C \subset P_{v_i v_{i+1}}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gibt es eine Ecke  $v_i \in L_=(z^*) \cap \partial R$  und einen Punkt  $y \in L_=(z^*) \cap \partial R$ , welcher an einer Ecke der Niveaumenge  $L_{\leq}(z^*)$  liegt. Somit kann  $x^*$  durch  $v_i$  oder durch  $y \in H$  ersetzt werden.  $\square$

### 3.3.2 Beispiel

Es werden wieder die Standorte

$$A_1 = (3, 3), \quad A_2 = (3, 8) \quad \text{und} \quad A_3 = (7, 5)$$

mit den gauges

$$\gamma_1(x) = \|x\|_{\infty}, \quad \gamma_2(x) = \|x\|_1 \quad \text{und} \quad \gamma_3(x) = 2\|x\|_{\infty},$$

aber nun mit den Gewichten

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1 \quad \text{und} \quad w_3 = 1$$

verwendet, wieder ähnlich zu Beispiel 2.4.1 auf Seite 15.

Hinzu kommt nun ein polygonartiges verbotene Gebiet  $R$ , welches in der folgende Abbildung dargestellt wird:

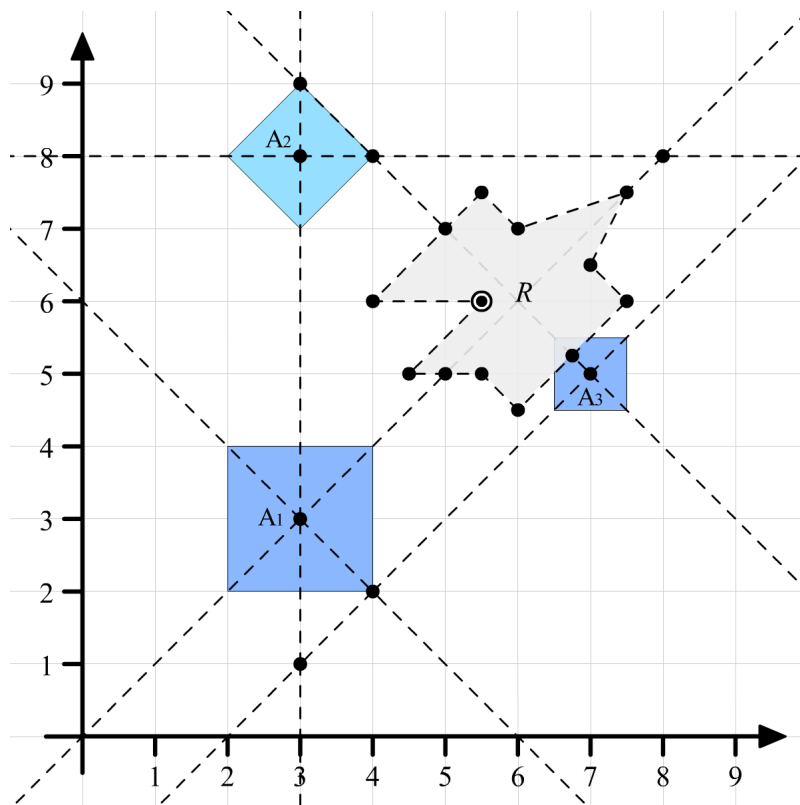


Abbildung 14: Standortproblem mit polygonartigem verbotenen Gebiet.

Um die optimalen Standorte  $X^*(f)$  zu finden, müssen die Punkte  $x$  aus  $I \cap F$ , aus  $H \cap \partial R$  sowie die Ecken von  $P$  untersucht werden:

$x$	(3, 1)	(3, 3)	(3, 8)	(4, 2)	(4, 8)	(6.75, 5.25)
$f(x)$	17	13	13	14	12	10.75
$x$	(7, 5)	(8, 8)	(10, 8)	(-2, 8)	(3, 9)	(7.5, 6)
$f(x)$	11	16	20	28	15	13
$x$	(7, 6.5)	(7.5, 7.5)	(6, 7)	(5.5, 7.5)	(5, 7)	(5, 6)
$f(x)$	12.5	14.5	12	12.5	11	11
$x$	(5.5, 6)	(4.5, 5)	(5, 5)	(5.5, 5)	(6, 4.5)	
$f(x)$	<b>10.5</b>	11.5	11	11	11.5	

Anhand der Tabelle erkennt man, dass die optimale Lösung nur der Punkt (5.5, 6) ist:

$$X^*(f) = \{(5.5, 6)\}.$$

### 3.4 Lösung von Medianproblemen mit dem Komplement von polygonartigen Mengen als verbotenes Gebiet

Als verbotenes Gebiet  $R$  wird nun das Komplement einer polygonartigen Menge angenommen. Da das zu untersuchende Problem nun begrenzt ist, muss auch der Fall  $W < 0$  berücksichtigt werden:

#### 3.4.1 Satz 1

Sei  $P$  eine polygonartige Menge und sei  $V(P) = \{v_1, \dots, v_n\}$  die Menge aller Ecken von  $P$ .

Sei nun  $R = \mathbb{R}^2 \setminus P$  das verbotene Gebiet, sei  $W \neq 0$  und sei  $X^*(f) \cap F = \emptyset$ .

Dann gibt es einen optimalen Standort  $x^* \in X_R^*(f)$  mit  $x^* \in H \cap \partial R$  oder mit  $x^* \in I \cap F$  oder mit  $x^* \in V(P)$ .

#### Beweisskizze

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.3.1 und wird daher hier ausgelassen.

## 4 Aufgaben

### 4.1 Aufgabe 1

Es seien die drei Standorte

$$A_1 = (2, 2), \quad A_2 = (3, 8) \quad \text{und} \quad A_3 = (7, 4)$$

gegeben. Jeder dieser Standort besitzt einen eigenen gauge  $\gamma_m$ , welcher durch die Extrempunkte von  $B_m$  für  $m = 1, \dots, 3$  gegeben wird:

$$\begin{aligned} \text{ext}(B_1) &= \{(0, 1), (1, -1), (-1, -1)\}, \\ \text{ext}(B_2) &= \{(0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)\}, \\ \text{ext}(B_3) &= \{(2, 1), (2, -1), (-2, -1), (-2, 1)\}. \end{aligned}$$

Weiter seien die Standorte

$$X_1 = (2, 5), \quad X_2 = (6, 7) \quad \text{und} \quad X_3 = (7, 1)$$

gegeben.

- (1) Zeichne die Standorte  $A_1$  bis  $A_3$  mit dem Einheitskreis des jeweiligen gauges in ein Koordinatensystem.
- (2) Finde heraus, welcher gauge auch eine Norm ist und um welche Norm es sich dabei handelt.
- (3) Zeichne nun auch  $X_1$  bis  $X_3$  in das Koordinatensystem und bestimme die Abstände von  $X_i$  zu  $A_m$  bezüglich des gauges  $\gamma_m$  für  $i = 1, 2, 3$  und  $m = 1, 2, 3$ .

#### 4.1.1 Lösung

##### Teil 1

Die folgende Abbildung zeigt die Standorte  $A_1$  bis  $A_3$  mit dem Einheitskreis des jeweiligen gauges:

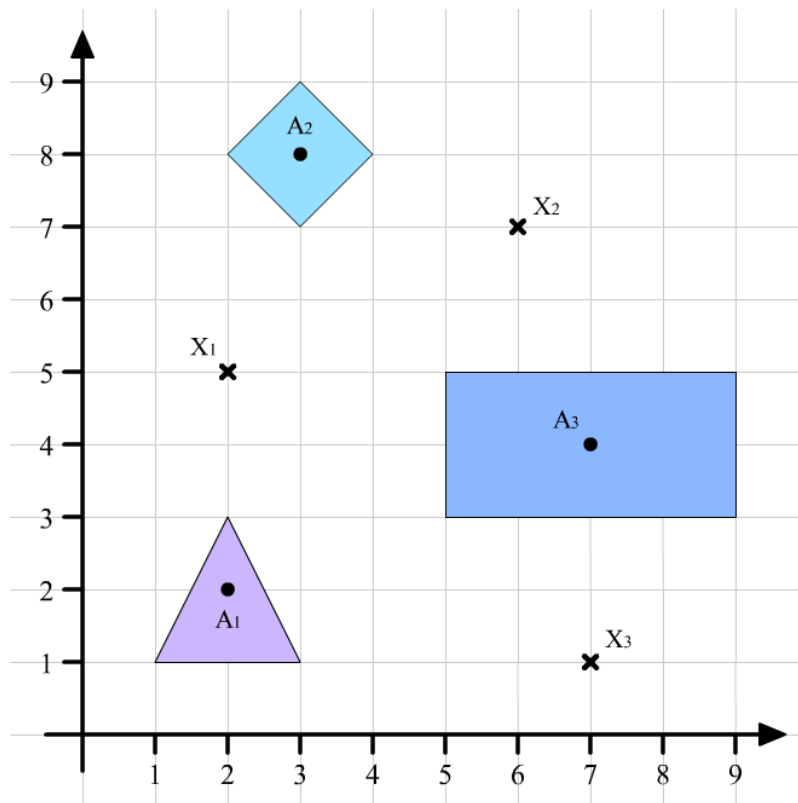


Abbildung 15: Standortproblem  $A_1$  bis  $A_3$  mit Einheitskreisen.

**Teil 2**

Es handelt sich nur bei  $\gamma_2$  und bei  $\gamma_3$  um eine Norm, es gilt für  $x = (x_1, x_2)$

$$\gamma_2(x) = \|x\|_1 \quad \text{und} \quad \gamma_3(x) = \max \left\{ \frac{1}{2}|x_1|, |x_2| \right\}.$$

**Teil 3**

Für die jeweiligen Abstände gilt:

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(X_1 - A_1) = 3, & \gamma_1(X_2 - A_1) = 13, & \gamma_1(X_3 - A_1) = 9, \\ \gamma_2(X_1 - A_2) = 4, & \gamma_2(X_2 - A_2) = 4, & \gamma_2(X_3 - A_2) = 11, \\ \gamma_3(X_1 - A_3) = 2.5, & \gamma_3(X_2 - A_3) = 3, & \gamma_3(X_3 - A_3) = 3. \end{array}$$

**4.2 Aufgabe 2**

Es seien die drei existierenden Standorte

$$A_1 = (3, 3), \quad A_2 = (6, 6) \quad \text{und} \quad A_3 = (8, 4)$$

mit den Gewichten

$$w_1 = 2, \quad w_2 = 1 \quad \text{und} \quad w_3 = 1$$

gegeben. Diesen Standorten besitzen die folgenden gauges:

$$\gamma_1(x) = \|x\|_1, \quad \gamma_2(x) = \|x\|_\infty \quad \text{und} \quad \gamma_3(x) = \frac{1}{2}\|x\|_\infty.$$

Weiter sei  $R = [5, 8] \times [1, 3.5]$  ein verbotenes Gebiet.

- (1) Zeichne die Standorte  $A_1$  bis  $A_3$  mit dem Einheitskreis des jeweiligen gauges in ein Koordinatensystem.
- (2) Bestimme  $H$  und  $I$  graphisch, also die Vereinigungen der Fundamentalrichtungen und deren Schnittpunkte.
- (3) Zeichne das verbotene Gebiet  $R$  in das Koordinatensystem und bestimme die Schnittpunkte  $H \cap \partial R$ .
- (4) Bestimme die Menge der optimalen Standorte  $X^*(f)$  in  $F = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(R)$ , also

$$X^*(f) = \min_{x \in F} \sum_{m=1}^3 w_m \gamma_m(x - A_m).$$

#### 4.2.1 Lösung

Die folgende Abbildung zeigt die Standorte  $A_1$  bis  $A_3$  mit dem Einheitskreis des jeweiligen gauges. Die gestrichelten Halbgeraden stellen die Menge  $H$  und den Rand  $\partial R$  von  $R$  dar und auch die Punkte aus  $I \cap F$  und  $H \cap \partial R$  wurden angedeutet:

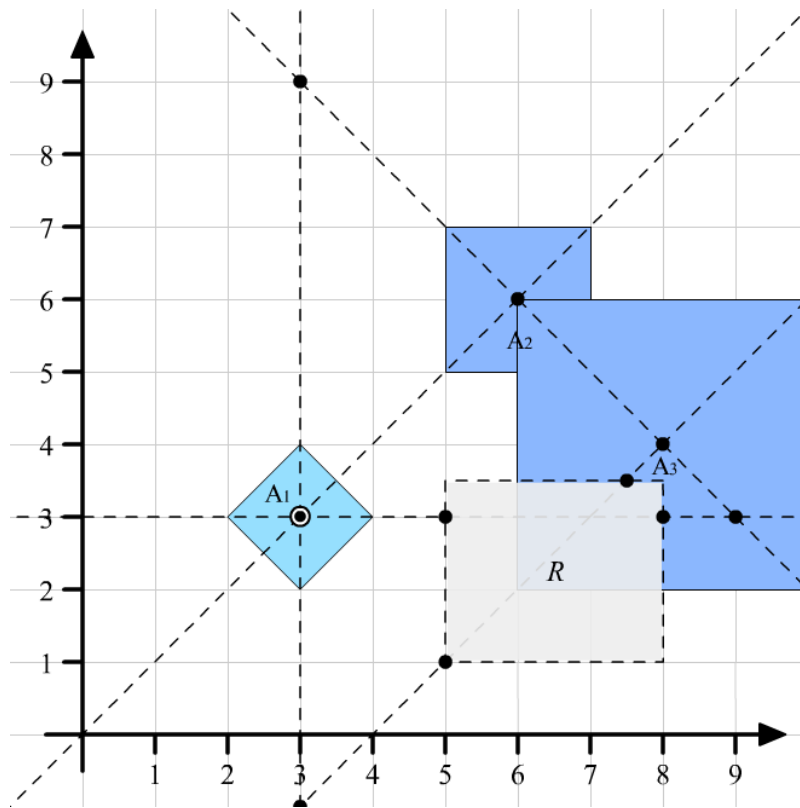


Abbildung 16: Standortproblem zu Aufgabe 2.

Um die optimalen Standorte  $X^*(f)$  zu finden, müssen nun die Punkte  $x$  aus  $I \cap F$  und  $H \cap \partial R$  untersucht werden:

$x$	(3, 3)	(7.5, 3.5)	(9, 3)	(8, 4)	(6, 6)	(3, 9)	(3, -1)
$f(x)$	<b>5.5</b>	12.75	15.5	14	13	17.5	17.5
$x$	(5, 1)	(5, 3)	(8, 3)				
$f(x)$	14.5	8.5	13.5				

Anhand der Tabelle und aufgrund der zellenweise Linearität der Zielfunktion erkennt man, dass es nur einen optimalen Standort gibt:

$$X^*(f) = \{(3, 3)\}.$$



# Literaturverzeichnis

- [1] Chen, P.-C., Hansen, P., Jaumard, B., Tuy, H. (1991): "Weber's problem with attraction and repulsion." Technical Report, Rutgers Center for Operations Research, Seiten 62 bis 91.
- [2] Drezner, Z., Wesolowsky, G.O. (1990): "The Weber problem on the plane with some negative weights." INFOR 29, Seiten 87 bis 99.
- [3] Hamacher, H.W., Nickel, S. (1994): "Combinatorial algorithms for some 1-facility median problems in the plane". European Journal of Operational Research 79, Seiten 340 bis 351.
- [4] Nickel, S., Dudenhöffer, E. (1997): "Weber's Problem with Attraction and Repulsion under Polyhedral Gauges". Journal of Global Optimization, Abstract 11, Seiten 409 bis 432.
- [5] Klamroth, K. (2002): "Single Facility Location Problems with barriers". Seiten 6 bis 14. Springer Verlag Telos.
- [6] Scholz, D. (2005): "Optimierung". Vorlesungsmitschrift im SoSe 2005 bei Prof. A. Schöbel, Universität Göttingen.