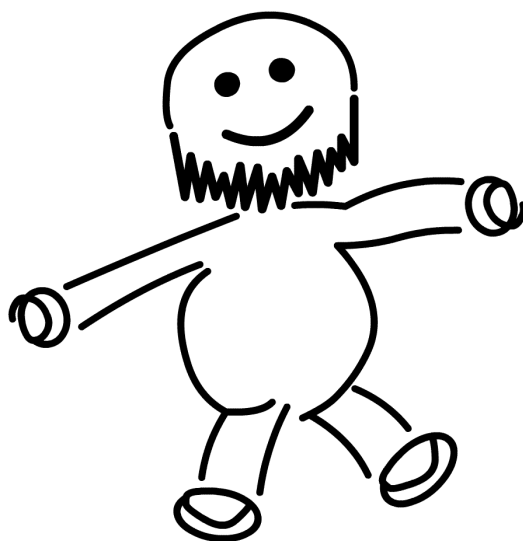


Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 30

Die spezifische Wärme

Wintersemester 2005 / 2006



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
E-Mail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	B9
Assistent:	André Holz
Durchgeführt am:	7. Februar 2006
Protokoll abgeben:	9. Februar 2006
Protokoll verbessert:	15. Februar 2006

Testiert: _____

1 Einleitung

Dieser Versuch ist ein Analogon zu Versuch 6: Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer. Daher werden einige Begriffe auch nur sehr flüchtig wiederholt.

Wir wollen nun die spezifische Wärme von Festkörpern bestimmen.

2 Theorie

2.1 Spezifische Wärmekapazität

Die Definition der *spezifischen Wärmekapazität* ist

$$c := \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}, \quad (1)$$

dabei ist m die Masse, dQ die Wärmemenge und dT die Temperaturveränderung. Entsprechend gilt für die molare Wärmekapazität

$$c_{mol} = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT},$$

wobei ν die Molzahl beschreibt. Die zu leistende Volumenarbeit bei der Erwärmung von Festkörpern ist sehr gering und kann vernachlässigt werden, weshalb die spezifischen Wärmekapazitäten bei festem Volumen c_V und festem Druck c_P fast identisch sind:

$$c_V \approx c_P.$$

2.2 Die Regel von Dulong-Petit

Die Regel von Dulong-Petit besagt, dass ein Festkörper aus Molekülen besteht, die in einem Kristallgitter angeordnet sind. Jedes dieser Moleküle besitzt eine spezifische Anzahl von Freiheitsgraden f , welche Translation, Rotation und Schwingung beschreiben. Jeder Freiheitsgrad trägt die Energie

$$W = k_B \frac{T}{2}$$

zur Gesamtenergie bei, dabei ist k_B die Boltzmannkonstante und T wie üblich die Temperatur. Für die Energie eines Stoffes mit N Molekülen gilt folglich

$$W = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} \nu N_A k_B T = \frac{f}{2} \nu R T,$$

wobei N_A die Avogadrozahl und $R = N_A \cdot k_B = 8,31 \text{ J/K mol}$ die Gaskonstante beschreibt. Für die molare Wärmekapazität gilt

$$c_{mol} = \frac{1}{\nu} \frac{dW}{dT} = \frac{f}{2} R.$$

Die Moleküle eines Feststoffes besitzen bei hohen Temperaturen drei Freiheitsgrade der Rotation und drei Schwingungsfreiheitsgrade, mit obiger Formel gilt also

$$c_{mol} = \frac{2 \cdot 3}{2} R = 3R.$$

Bei niedrigeren Temperaturen besitzt die Regel von Dulong-Petit keine Gültigkeit mehr, da hier die Freiheitsgrade „einfrieren“ [quantisierte Energie]. Die Wärmekapazität kann dann nach Einstein berechnet werden.

2.3 Wärmekapazität nach Einstein

Diese Theorie geht davon aus, dass die Moleküle in der Gitterstruktur eines Festkörpers quantisierte Energien besitzen. Die Energie ε_j eines Gitterelements im Zustand j beträgt

$$\varepsilon_j = j\omega h,$$

wobei h das Plancksche Wirkungsquantum, ω die Kreisfrequenz und j eine ganzzahlige Zahl ist. Nach der Boltzmannverteilung befinden sich N_j Teilchen in diesem Zustand, es gilt

$$N_j = N_0 \exp\left(-j\omega \frac{h}{k_B T}\right)$$

mit der Grundzahl N_0 für $\varepsilon_j = 0$. Für die Gesamtenergie gilt nun

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j N_j = N \cdot \frac{h\omega}{\exp(h\omega/k_B T) - 1}.$$

Für eine Schwingung mit 3 Freiheitsgraden gilt dementsprechend

$$\begin{aligned} E &= 3N \frac{h\omega}{\exp(h\omega/k_B T) - 1} \\ &= 3N_{AV} \frac{k_B \Theta_E}{\exp(\Theta_E/T) - 1} = 3R\nu \frac{\Theta_E}{\exp(\Theta_E/T) - 1}, \end{aligned} \quad (2)$$

hierbei ist $\Theta_E = h\omega/k_B$ die sogenannte **Einsteintemperatur**. Für die molare Wärme gilt

$$c_{mol} = \frac{1}{\nu} \frac{dE}{dT} = 3R \frac{\Theta_E^2}{T^2} \frac{\exp(\Theta_E/T)}{\exp(\Theta_E/T) - 1)^2}.$$

Entwickelt man nun Gleichung (2) für $T \gg \Theta_E$, so erhält man

$$E \approx 3R\nu T \quad \text{und damit} \quad c_{mol} = 3R.$$

Betrachtet man umgekehrt $T \ll \Theta_E$, so hat man

$$\exp(\Theta_E/T) - 1 \approx \exp(\Theta_E/T)$$

und damit

$$E \approx 3R\nu \exp(-\Theta_E/T) \quad \text{ sowie } \quad c_{mol} = 3R \exp(-\Theta_E/T) \cdot \left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2.$$

Die Einsteintemperatur ist der Übergang von dem durch die Regel von Dulong-Petit beschriebenen Verhalten zum abweichenden Verhalten bei tiefen Temperaturen.

2.4 Die Debyesche Theorie

Die Theorie Einsteins, dass die Gitterelemente schwingen, wurde von Debye erweitert, der davon ausging, dass auch das ganze Gitter schwingt und diese Schwingungen als Schall zu betrachten sind. Auch diese Schwingungen sind quantisiert, denn es treten nur Wellenlängen auf, die ganzzahlige Vielfache der Gitterkonstanten sind. Der Großteil der gespeicherten Energie steckt in diesen Schwingungen [stehende Wellen].

Nimmt man an, dass ein eindimensionales Gitter aus N äquidistanten Atomen besteht und die Gitterkonstante k besitzt, dann muss eine ganzzahlige Anzahl von n Halbwellen in das Gitter der Länge $L = N\lambda$ passen, um eine stehende Welle zu bilden. Es folgt

$$L = Nd = \frac{1}{2}n\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2\frac{dn}{N}.$$

Die Wellenlänge muss mindestens das doppelte der Länge annehmen. Das bedeutet, dass N verschiedene Normalschwingungen auftreten können. Logischerweise besitzt ein dreidimensionales Gitter dann $3N$ Normalschwingungen. Jede dieser Wellenformen entspricht einem quantisierten Energiezustand und trägt zur Gesamtenergie

$$dW = \frac{h\omega}{\exp(h\omega/Tk_B)}$$

bei. Betrachtet man ein kleines Kreisfrequenzintervall von ω bis $\omega + d\omega$, so treten in diesem

$$\frac{2L^3\omega^2}{2\pi^2c_S^2}$$

Normalschwingungen auf, dabei ist c_S die Schallgeschwindigkeit. Hieraus kann die Energie berechnet werden:

$$E = 9Nk_B \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx.$$

Dabei wurde die **Debyetemperatur**

$$\Theta_D = \frac{h\omega_{max}}{k_B} \approx \frac{h\pi c_S}{k_B}$$

und der Teilchenzahl $N = (L/d)^3$ verwendet. Betrachtet man die Grenzfälle der Temperatur, so erhält man für $T \gg \Theta_D$ wie bei Dulong-Petit

$$c_{mol} = 3R.$$

Für $T \ll \Theta_D$ hingegen folgt

$$E = \frac{2\pi^4 N k_B T^3}{5\Theta_D^3} \quad \text{also} \quad c_{mol} = 12 \frac{\pi^4 k_B}{5m} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3.$$

2.5 Das Thermoelement

Berühren sich zwei unterschiedliche Metalle, so tauschen diese Elektronen aus. Das Metall mit der niedrigeren Austrittsarbeit, also dem niedrigeren Fermi-niveau, der Besetzungswahrscheinlichkeit eines Energieniveaus durch ein Elektron, gibt Elektronen an das andere ab. Es entsteht eine Potentialdifferenz. Dies passiert so lange, bis sich eine solche Kontaktspannung bildet, dass die Differenz der Fermi-niveaus ausgeglichen ist. Die Kontaktspannung hängt von der Temperatur ab, da bei höheren Temperaturen mehr Elektronen die Austrittsarbeit leisten können. Durch Zusammenlöten der Enden ist es möglich einen Temperaturmessgerät zu bauen: Während man das eine Ende bei konstanter Temperatur hält, misst man die Spannungsdifferenz und erhält daraus die Temperaturdifferenz zum anderen Ende. Dies nennt man auch die *Thermospannung*. Aus ihr kann also zu gegebenen Angaben die Temperatur berechnet werden.

3 Versuchsdurchführung

Es werden zwei Probekörper [Aluminium und V2A] in einem Kalorimeter [Dewargefäß mit isolierendem Stahlzylinder] mit einer Heizwendel erhitzt und dann wieder abgekühlt. Dies geschieht zunächst in Luft [zu Beginn bei Zimmertemperatur] und danach in einer Umgebung aus flüssigem Stickstoff [77 K]. Die Temperatur wird über ein Thermoelement bestimmt, dessen eine Seite in Eiswasser steckt [Referenztemperatur 273 K].

Mit zwei Körpern, die sich jeweils in Luft und in Stickstoff befinden, führen wir also insgesamt 4 Messungen durch. Dabei wird jeweils in festen Zeitintervallen von 30 s die Spannung des Thermoelementes notiert und beim Erhitzen zusätzlich die Spannung der Heizwendel. Der Strom sollte hierbei auf 0.5 A konstant gehalten werden, dazu muss nachgeregelt werden.

4 Auswertung

Zunächst einmal möchten wir festhalten, dass wir die Auswertung nun zum zweiten Mal durchführen. In unserer vorherigen Auswertung haben wir die

fatale Annahme gemacht, dass keine Energie abgestrahlt wird, das ist hier aber natürlich nicht der Fall.

Danke an unseren Assistenten André, der uns bei der neuen Auswertung sehr unterstützte.

4.1 Temperaturverläufe

Die Thermospannung des Thermoelementes wurde in mV gemessen und kann durch

$$T(U) = 273.369 + 20.456 U - 0.302 U^2 + 0.009 U^3$$

in Kelvin umgerechnet werden¹.

Damit wurde in Abbildung 1 der Temperaturverlauf in Luft und in Abbildung 2 der Temperaturverlauf in der Stickstoffumgebung für die beiden Körper berechnet.

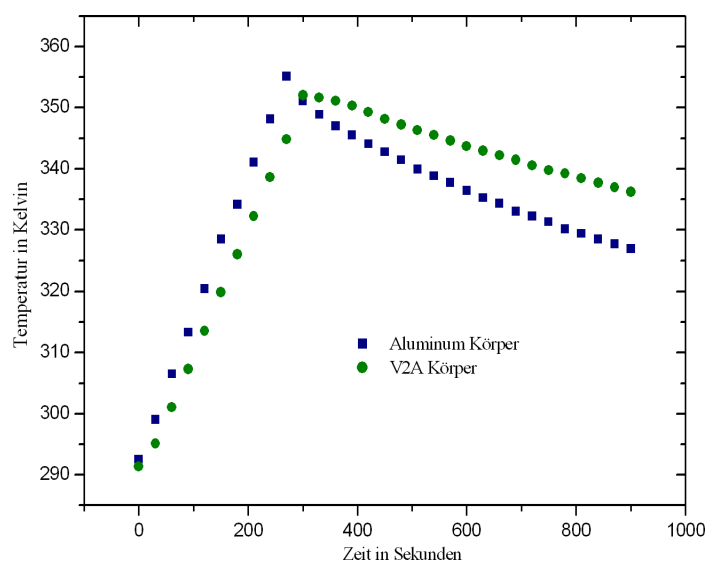


Abbildung 1: Temperaturverlauf in der Luftumgebung.

¹ Diese Gleichung stammt aus dem Praktikumsript: Peter Schaaf (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsdrucke Göttingen, Seite 227.

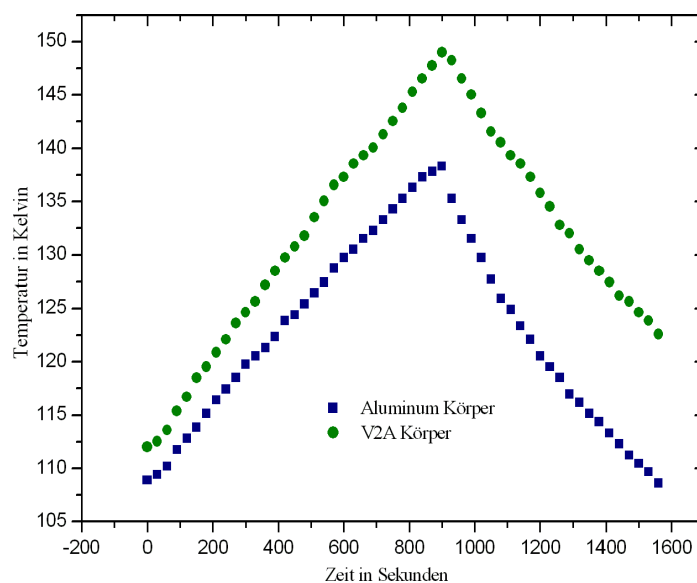


Abbildung 2: Temperaturverlauf in der Stickstoffumgebung.

Es ist zu erkennen, dass wir bei der Erwärmung einen linearen Anstieg der Temperatur annehmen können. Der theoretisch erwartete exponentielle Abfall bei der Abkühlung ist jedoch nur bei Aluminium zu erkennen.

4.2 Widerstand der Heizdrähte

Da der Heizstrom konstant $I = 0.5 \text{ A}$ betrug, kann man den ohmschen Widerstand $R(T)$ der beiden Heizdrähte für die verschiedenen Versuchstemperaturen T durch

$$R(T) = \frac{U(T)}{I} = 2 \cdot U(T) \text{ A}^{-1}$$

berechnen, dabei ist $U(T)$ die Heizspannung zum Zeitpunkt T . Die Ergebnisse unserer Messungen wurden in Abbildung 3 und 4 verdeutlicht.

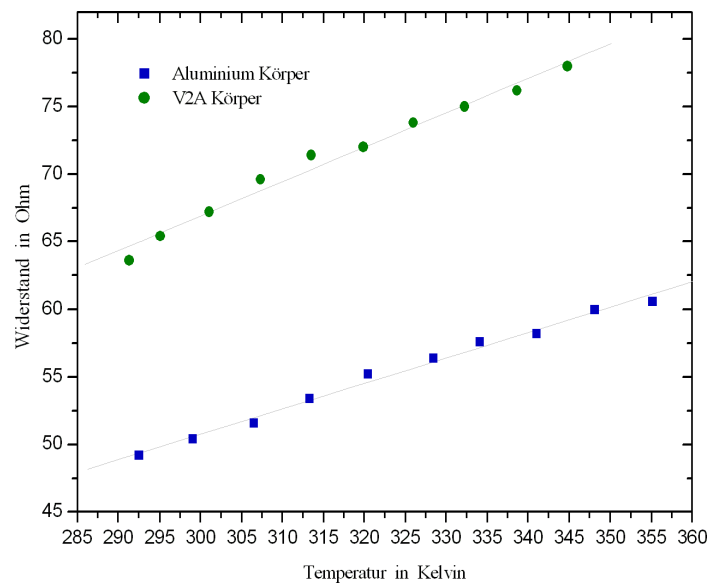


Abbildung 3: Widerstand der Heizdrähte in der Luftumgebung.

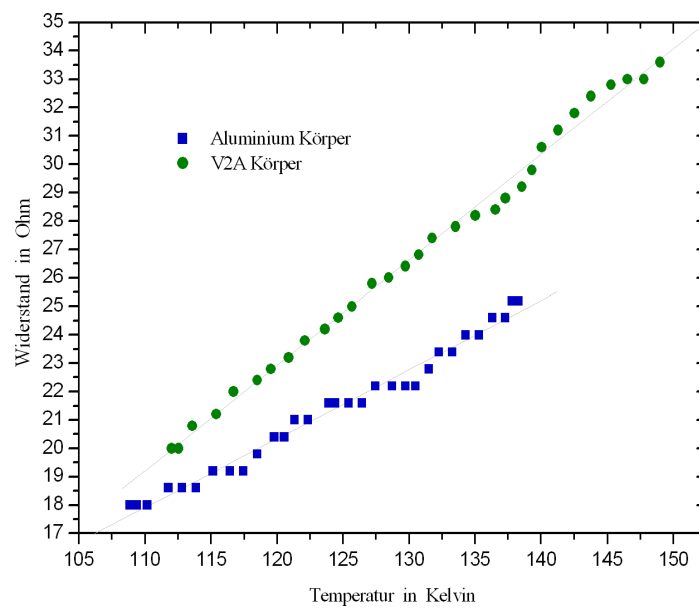


Abbildung 4: Widerstand der Heizdrähte in der Stickstoffumgebung.

4.3 Spezifische Wärmekapazität

Da wir bei der Erwärmung einen linearen Temperaturverlauf und bei der Abkühlung einen exponentiellen Abfall der Temperatur erwarten, haben wir zunächst die Steigungen der linearen Regressionen der Erwärmung und die Steigungen der linearen Regressionen vom Logarithmus der Abkühlung er-

mittelt:

			Steigung
Aluminium	Erwärmung	Luft	0.232 ± 0.002
Aluminium	Abkühlung	Luft	$(-1.158 \pm 0.028)10^{-4}$
Aluminium	Erwärmung	Stickstoff	0.034 ± 0.0005
Aluminium	Abkühlung	Stickstoff	$(-3.33 \pm 0.074)10^{-4}$
V2A	Erwärmung	Luft	0.203 ± 0.003
V2A	Abkühlung	Luft	$(-0.796 \pm 0.009)10^{-4}$
V2A	Erwärmung	Stickstoff	0.041 ± 0.0005
V2A	Abkühlung	Stickstoff	$(-2.951 \pm 0.038)10^{-4}$

Die Steigungen haben dabei die Einheit K/s bzw. $1/s$.

Um damit die spezifische Wärme von Aluminium und von V2A zu bestimmen, betrachten wir zunächst die elektrische Leistung.

$$P_{elk} = P_{erw} + P_{abs} = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{erw} + P_{abs},$$

dabei steht P_{elk} für die elektrische Leistung und P_{erw} bzw. P_{abs} für die Erwärmung bzw. die Abstrahlung. Die spezifische Wärmekapazität wird nach Gleichung (1) für einen Körper der Masse 1 kg durch

$$c = \frac{dQ}{dT}$$

definiert. Damit folgt

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = c \cdot \frac{dT}{dt}$$

und für die Abkühlung erhalten wir

$$0 = \frac{dQ}{dt} + P_{abk} \quad \Leftrightarrow \quad P_{abk} = - \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{abk},$$

da hier ja gerade $P_{el} = 0$ gilt. Alle vorherigen Gleichungen kombiniert ergeben

$$P_{el} = c \cdot \left(\left(\frac{dT}{dt} \right)_{erw} - \left(\frac{dT}{dt} \right)_{abk} \right)$$

und umgeformt erhalten wir

$$c(T) = \frac{P_{el}(T)}{\left(\frac{dT}{dt} \right)_{erw} - \left(\frac{dT}{dt} \right)_{abk}}. \quad (3)$$

Die elektrische Leistung $P_{el}(T)$ zum Zeitpunkt T kann durch

$$P_{el}(T) = U(T) \cdot I = U(T) \cdot 0.5\text{ A}$$

berechnet werden, dabei ist $U(T)$ die verwendete Heizspannung und der Heizstrom I betrug konstant $I = 0.5 \text{ A}$.

Nun nutzen wir auch die zuvor angegebenen Regressionsgeraden. Bei der Erwärmung haben wir den folgende linearen Zusammenhang:

$$T(t) = m_{erw}t + b,$$

also erhalten wir direkt

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{erw} = m_{erw},$$

dabei ist m_{erw} die Steigung aus der Tabelle zuvor.

Bei der Abkühlung ist die Situation etwas komplizierter: Wir haben

$$\log(T(t)) = m_{abk}t + b$$

und erhalten damit

$$t = \frac{\log(T(t)) - b}{m_{abk}} \quad \text{und} \quad T(t) = \exp(m_{abk}t + b).$$

Diese beiden Gleichungen liefern nun

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{dT}{dt}\right)_{abk} = m_{abk} \cdot \exp(m_{abk}t + b) \\ &= m_{abk} \cdot \exp(\log(T(t)) - b + b) = m_{abk} \cdot T. \end{aligned}$$

Nun können wir Gleichung (3) auch schreiben als

$$c(T) = \frac{U(T) \cdot 0.5 \text{ A}}{m_{erw} - m_{abk}T}.$$

Um damit die spezifische Wärmekapazität der beiden Probekörper zu berechnen, müssen wir noch durch die Masse M der Körper teilen und erhalten damit die zu verwendende Gleichung

$$c(T) = \frac{U(T) \cdot 0.5 \text{ A}}{M \cdot (m_{erw} - m_{abk}T)}. \quad (4)$$

Mit den Annahmen, dass die Stromstärke und die Massen der Körper exakt sind, und mit der Schätzung von $\sigma_{U(t)} = 1$ erwarten wir den folgenden Fehler:

$$\sigma_{c(T)} = \sqrt{\left(\frac{\partial c(T)}{\partial U(T)} \sigma_{U(T)}\right)^2 + \left(\frac{\partial c(T)}{\partial m_{erw}} \sigma_{m_{erw}}\right)^2 + \left(\frac{\partial c(T)}{\partial m_{abk}} \sigma_{m_{abk}}\right)^2}.$$

Mit den verwendeten Massen $M_{Al} = 0.0526 \text{ kg}$ und $M_{V2A} = 0.1487 \text{ kg}$ sind wir nun in der Lage die spezifische Wärmekapazität in Abhängigkeit der Temperatur zu berechnen. Siehe dazu Abbildung 5 und Abbildung 6.

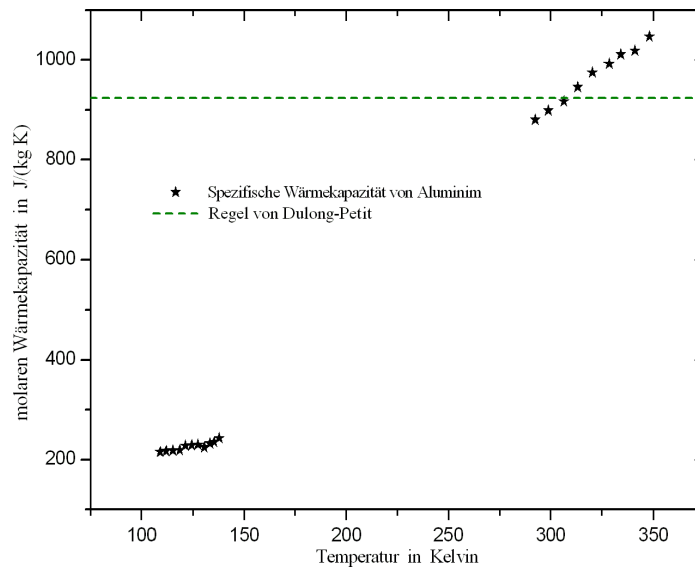


Abbildung 5: Spezifische Wärmekapazität von Aluminium.

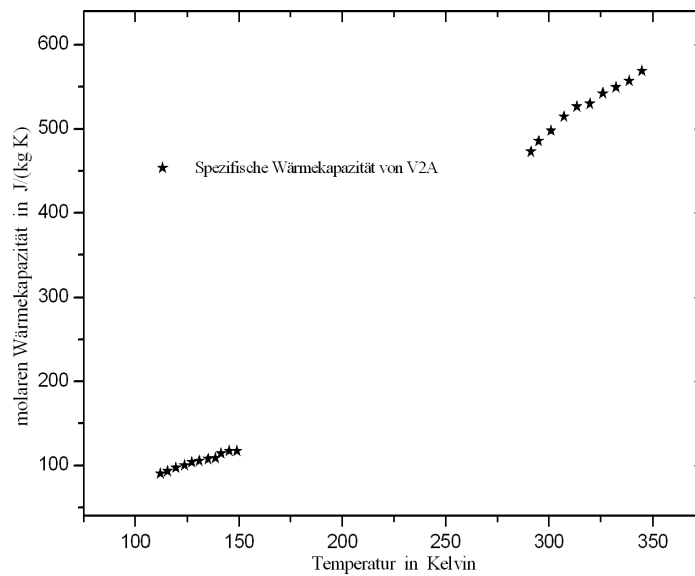


Abbildung 6: Spezifische Wärmekapazität von V2A.

Bei der Messreihe zum Aluminium haben wir zu unseren Ergebnissen auch noch die Regel von Dulong-Petit eingezeichnet: Nach Dulong-Petit gilt

$$c(T) = c = \frac{3R}{m_{mol}},$$

dabei ist $R = 8.3145 \text{ J/kgK}$ die Gaskonstante und $m_{mol} = 0.027 \text{ kg}$ die molare Masse von Aluminium.

Für V2A ist uns keine molare Masse bekannt, daher konnten wir die Regel von Dulong-Petit leider nicht einzeichnen.

5 Diskussion

Zunächst lässt sich sagen, dass uns nur eine sehr kleine Skala am Netzgerät zum Messen der Spannung zur Verfügung stand. Während des Versuches war uns noch nicht klar, dass diese Spannung ein wesentlicher Bestandteil in der Auswertung des Versuches darstellt, sonst hätten wir mit Sicherheit ein Multimeter zur besseren Bestimmung der Werte verwendet. Es wäre wünschenswert, wenn dieser Punkt für unsere Nachfolger im Praktikumsskript genauer beschrieben werden könnte.

Unsere Messergebnisse der spezifischen Wärmekapazität des Aluminiums in der Luftumgebung stimmen mit etwas Abweichung mit der Regel von Dulong-Petit überein. Für die Stickstoffumgebung haben wir Ergebnisse erwartet, die in etwa der Regel von Debye entsprechen. Dies ist bei uns nicht der Fall.

Für V2A stehen uns wie bereits angesprochen keine Vergleichsdaten zur Verfügung.

Durch mehr Messwerte beim Abkühlen der Körper hätten wir eventuell bessere Ergebnisse erzielen können, jedoch war der Versuch einfach zu langweilig.

Eigene Kommentare

[Was ist überhaupt V2A. Ein Edelstahl, na toll. Ein total stumpfer Versuch, total langweilig. Auswertung: fürn Arsch. Reine Zeitverschwendung, Auswertung gleich zweimal gemacht, trotzdem total beschissene Ergebnisse.]_{Daniel}

[Manchmal wundert man sich, wie einige Vorgängerprotokolle testiert wurden. Zumindest einen Tipp zur korrekten Berechnung der spezifischen Wärmekapazität hätte es im Skript geben können.]_{Hauke}