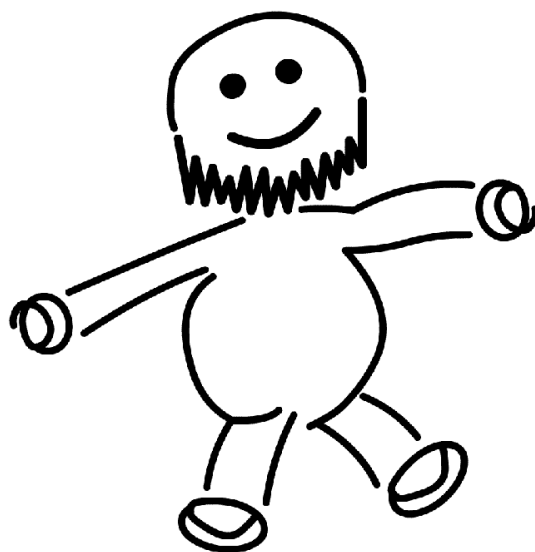


Physikalisches Praktikum für das Hauptfach Physik

Versuch 05

Kapillarität und Viskosität

Sommersemester 2005



Name:	Daniel Scholz
Mitarbeiter:	Hauke Rohmeyer
E-Mail:	physik@mehr-davon.de
Gruppe:	13
Assistent:	Sarah Köster
Durchgeführt am:	12. Mai 2005
Protokoll abgeben:	19. Mai 2005
Protokoll verbessert:	17. Juni 2005

Stempel:

Testiert: _____

1 Einleitung

Kapillarität und Viskosität sind erstaunliche und lebenswichtige physikalische Phänomene der Natur. Ob beim Nährstofftransport der Pflanzen oder beim Schreiben mit einem Federkiel - zeitweise scheinen Flüssigkeiten ganz und gar der Schwerkraft zu trotzen und "nach oben" zu fließen. Berücksichtigt man jedoch die sogenannte Oberflächenspannung, so schwindet der Zauber und die Erscheinungen werden mathematisch fassbar.

2 Theorie

2.1 Intermolekulare Kräfte

Während die Atome in Molekülen selbst durch kovalente [Elektronenpaar] Bindungen oder durch heteropolare [Ionen] Bindungen zusammengehalten werden, existieren zwischen den Teilchen intermolekulare Kräfte, von denen im folgenden die zwei wichtigsten erwähnt werden sollen. Die Effekte, die durch diese **Kohäsionskräfte** hervorgerufen werden, sollen später vertiefend erläutert werden.

Dipol-Dipol Kräfte

Polare Moleküle, wie sie in der folgenden Abbildung dargestellt sind, besitzen ein permanentes Dipolmoment.

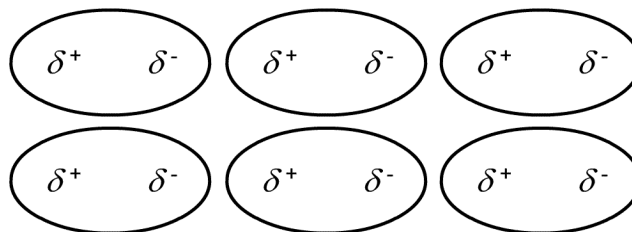


Abbildung 1 : Permanentes Dipolmoment

Daher ordnen sich solche Moleküle in dem umgebenden elektrischen Feld symmetrisch an. Am deutlichsten sichtbar ist dies in der regelmäßigen Anordnung von Kristallen, welche auf der elektrostatischen Wechselwirkung beruht.

Van der Waals Kräfte

Durch Schwingungen in den Elektronenorbitalen eines Moleküls kommt es zu stark fluktuierenden, zufälligen Ladungsverschiebungen. Im zeitlichen Mittel bleibt das Molekül jedoch "nach außen hin" neutral. Betrachtet man intermolekulare Wechselwirkungen, so sind die durch die Verschiebungen entstehenden elektrischen Felder jedoch nicht zu vernachlässigen. Die durch

diese Wechselwirkungen hervorgerufenen elektrodynamischen Kräfte werden nach ihrem Entdecker *van der Waals Wechselwirkungen* genannt.

Durch Induktion ebenso polarisierter Felder in benachbarten Elektronenwolken verstärkt sich dieser Effekt. Natürlich ist diese Form der Anziehung viel schwächer als die zwischen den Dipolen, in denen die Unterschiede in der Elektronegativität permanent und zudem weitaus stärker ausgeprägt sind. Jedoch werden die van der Waals Kräfte bei zunehmender Atomanzahl auch immer größer.

2.2 Oberflächenspannung

Wie beschrieben wirken zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit Anziehungskräfte, die mit wachsendem Abstand schnell abnehmen. Im Inneren des Stoffes verschwindet die resultierende Kraft, da sich die Kraftvektoren aller umliegenden Moleküle zu 0 aufsummieren. An der Grenzschicht zu einem anderen Medium dagegen ist ein Molekül nicht mehr von allen Seiten von anderen umgeben, daher wirkt hier eine resultierende Kraft, deren Vektor in das Innere der Flüssigkeit zeigt. Die Teilchen an dieser Grenzschicht besitzen damit ein höheres Potential als diejenigen, die im Inneren liegen.

Da das System bestrebt ist, einen möglichst energiearmen Zustand einzunehmen [nach der Thermodynamik sind solche Zustände wahrscheinlicher als energiereichere], wird es somit eine möglichst geringe Oberfläche im Vergleich zum Volumen "anstreben". Daher sind zum Beispiel Regentropfen im Idealfall auch Kugeln.

Um nun ein Molekül an die Oberfläche zu bringen, ist die so genannte *Oberflächenenergie* notwendig, die durch

$$E_A = \sigma \cdot A$$

definiert wird. Dabei ist A die betrachtete Oberfläche und σ die spezifische *Oberflächenspannung* [eine Materialkonstante], die von der verwendeten Flüssigkeit und dem über ihr liegenden Medium abhängt.

2.3 Kohäsion

Kohäsionskräfte treten zwischen den Molekülen des gleichen Materials auf und sorgen für dessen Zusammenhalt. Ihre Stärke bestimmt den Aggregatzustand: Im Festkörper sind sie am größten, in Flüssigkeiten kleiner und in Gasen sind sie vernachlässigbar gering.

Größen wie die Viskosität, die Kompressibilität sowie die schon erwähnte Oberflächenspannung sind von den Kohäsionskräften abhängig. Diese Kraft muss gerade zum "Zerteilen" eines Stoffes überwunden werden.

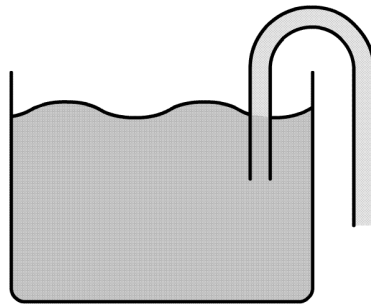


Abbildung 2 : Kohäsionsphänomen bei Wasser

Die Kohäsion ist auch für Phänomene verantwortlich, die auf den ersten Blick verwunderlich erscheinen. So kann zum Beispiel Wasser dazu gebracht werden, "nach oben" zu fließen. In der Abbildung wird ein Aufbau gezeigt, in dem ein "Flüssigkeitsfaden" den höchsten Punkt des Rohres überschritten hat. Nun wird der der Faden nicht abreißen, sondern wird das Wasser mit sich ziehen.

2.4 Adhäsion

Auch zwischen Molekülen unterschiedlicher Stoffe kommt es zu Wechselwirkungen. Sie sind für Phänomene wie die Haftreibung, für das Aneinanderhaften verschiedener Materialien und schließlich auch für die Benetzung verantwortlich. Bei allen Vorgängen, in denen Materialien beschichtet oder geklebt werden, wird die Adhäsion ausgenutzt.

Speziell für die Benetzung lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

(1) Vollständige Benetzung

Ist die Adhäsion größer als die Kohäsion, so breitet sich die Flüssigkeit über die komplette Fläche aus.

(2) Unvollständige Benetzung

Ist die Adhäsion kleiner als die Kohäsion, so zieht sich die Flüssigkeit zu Tröpfchen zusammen.

2.5 Kapillarität

In einem dünnen Röhrchen [Kapillare] steigt eine Flüssigkeit auf Grund der Kohäsions- und Adhäsionskräfte gegenüber dem eigentlichen Wasserspiegel auf oder ab, je nachdem, ob die Wände der Kapillare benetzt werden oder nicht.

Im Gleichgewichtsfall ist die Gewichtskraft der Wassersäule gleich der tragenden Randkraft. Für die Randkraft gilt dann

$$F_R = \frac{d}{dh} E_A = \frac{d}{dh} 2\pi r h \sigma = 2\pi r \sigma,$$

dabei ist r der Radius des Röhrchens. Zusammen mit der Dichte $\rho = m/\pi r^2 h$ erhält man nun

$$\begin{aligned} F_G &= F_R \\ mg &= 2\pi r \sigma \\ \rho \pi r^2 h g &= 2\pi r \sigma \\ h &= \frac{2\sigma}{\rho r g} \quad \text{oder} \\ \sigma &= \frac{1}{2} h \rho r g. \end{aligned}$$

Auch bezüglich des Winkels θ , den angrenzende Wand und Flüssigkeit tangential einschließen, lassen sich Aussagen aus den unterschiedlichen Oberflächenspannungen gewinnen.

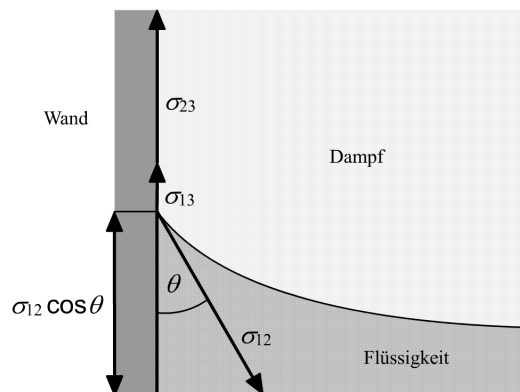


Abbildung 3 : Oberflächenspannungen

Je nachdem, in welchem Verhältnis die Kräfte an den Grenzflächen zueinander stehen und in welche Richtungen sie weisen, bilden sich an der Oberfläche der Säule zum Rand sogenannte **Menisken** aus. Im Gleichgewichtsfall addieren sich alle Grenzflächenspannungen, also alle wirkenden Kräfte, zu 0. Somit ergeben sich am Rand Bereiche, für die der Winkel zwischen Wand und Flüssigkeit nicht wie erwartet $\pm\pi/2$ ist.

Für die verschiedenen Phasen sind insgesamt drei Oberflächenspannungen zu betrachten, deren Bezeichnungen wie folgt gewählt wurden:

- (1) σ_{12} ist die Oberflächenspannung zwischen der Flüssigkeit und ihrem Dampf.
- (2) σ_{23} ist die Oberflächenspannung am Übergang der Flüssigkeit zu begrenzender Wand.
- (3) σ_{13} ist die Oberflächenspannung für den Übergang von gasförmig zu fest, also an der Grenze zwischen Wand und Dampf.

Es gilt nun der Zusammenhang

$$\sigma_{23} - \sigma_{13} = -\sigma_{12} \cos \theta,$$

dabei heißt $\sigma_{23} - \sigma_{13}$ die **Haftspannung**.

Anhand der folgenden Fallunterscheidung soll die Bedeutung dieser Gleichung verdeutlicht werden:

(1) $0 < \sigma_{13} - \sigma_{23} < \sigma_{12}$

Die obige Gleichung ist für Winkel θ im Intervall $0 < \theta < \pi/2$ erfüllt. Die Flüssigkeit benetzt also die Wand und ihre Oberfläche ist konkav gewölbt.

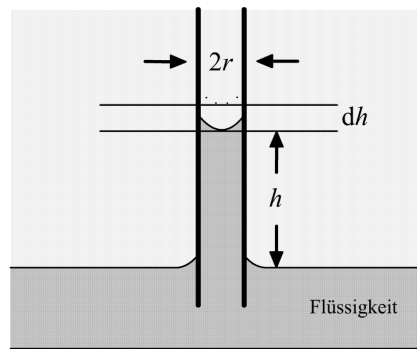


Abbildung 4 : Wasser in einer Kapillare

Beispiel: Wasser.

(2) $\sigma_{13} - \sigma_{23} < 0$

Die obige Gleichung ist für Winkel θ im Intervall $\pi/2 < \theta < \pi$ erfüllt. Die Flüssigkeit benetzt die Wand nicht und die Oberfläche ist konvex gewölbt. Dies ist zum Beispiel bei Quecksilber in einem Steigungsrohr der Fall, was beim Ablesen der üblichen Manometer beachtet werden sollte.

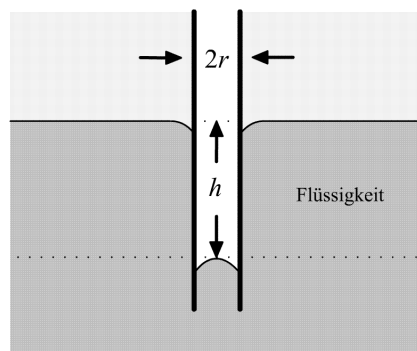


Abbildung 5 : Quecksilber in einer Kapillare

Beispiel: Quecksilber.

(3) $\sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$

Die obige Gleichung ist für keinen reellen Winkel θ erfüllt. Es ist also kein Gleichgewicht möglich, die Oberflächenspannung σ_{13} überwiegt und die Flüssigkeit "kriecht" an der Wand empor und benetzt sie vollständig.

2.6 Innere Reibung

Die Relativbewegung zwischen Körpern und Flüssigkeiten bzw. Gasen erfordert die Überwindung bewegungshindernder Kräfte selbst dann, wenn alle äußeren Einwirkungen eliminiert wurden.

Wird eine Platte oder ein Stab aus einem Gefäß herausgezogen, das mit einer zähen Flüssigkeit gefüllt ist, so wird auf Grund der Haftungreibung auch die an der Platte anliegende Flüssigkeitsschicht mitbewegt. So lässt sich das gesamte Gefäß in Schichten unterteilen, bei denen jede die nächste ein bisschen weniger beeinflusst.

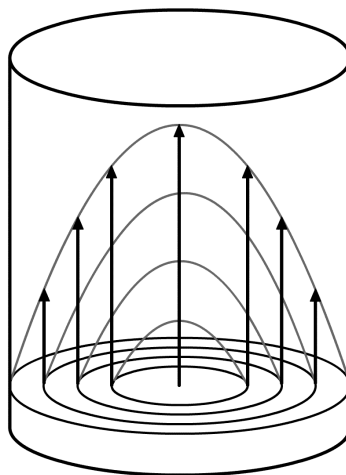


Abbildung 6 : Innere Reibung

Die letzte Schicht an der Wand erfährt keine Beschleunigung, ihre Geschwindigkeit bleibt bei 0.

Die Erklärung dieses Phänomens liefert die Betrachtung der zwischen den einzelnen Schichten herrschenden Reibungskräfte. Es sollte also eine Materialkonstante geben, die gerade die "Zähigkeit" einer Flüssigkeit beschreibt. Diese Konstante wird dann später **Viskosität** genannt.

Um für diese Größe Gesetzmäßigkeiten zu finden, ist es hilfreich, das Medium um die Platte in n parallele Schichten zu unterteilen. Unter der Annahme, dass die jeweiligen Geschwindigkeiten v_i konstant sind, findet man

experimentell die Proportionalität der Reibungskraft F_i zur Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Schichten $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$ und zur Fläche der benutzten Platte A :

$$F_i \sim \Delta v_i \quad \text{und} \quad F_i \sim A.$$

Dies ist recht einsichtig, jedoch muss noch berücksichtigt werden, dass auch und sogar hauptsächlich die Flüssigkeitsschichten untereinander wechselwirken. Daher gilt für die Schichtdicke $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ gerade

$$F_i \sim \frac{1}{\Delta z_i}.$$

Es bleibt also noch die schon erwähnte Materialkonstante η , welche die Viskosität beschreibt. Um nun ein möglichst allgemeines Gesetz für die Reibungskraft zu erhalten, betrachtet man den Grenzwert und erhält

$$F_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta \frac{\Delta v_i \cdot A}{\Delta z_i} = \eta A \frac{dv}{dz}.$$

Zusammenfassung

Zusammenfassend und vereinfacht lässt sich das Ergebnis nun so beschreiben:

Befindet sich zwischen einer Platte der Fläche A und einer festen Wand ein Flüssigkeitsfilm der Dicke z und soll die Platte mit der Geschwindigkeit v parallel zur Wand verschoben werden, so benötigt man die Kraft

$$F_R = \eta A \frac{v}{z}.$$

2.7 Dynamische Viskosität

Wenn eine Flüssigkeit durch ein Rohr strömt, ist die Geschwindigkeit auf Grund der Reibung an den Wänden nicht überall konstant. Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen laminarer und turbulenter Strömung.

Laminaren Strömung

Man spricht von laminarer Strömung, wenn die einzelnen Flüssigkeitsschichten glatt übereinandergleiten, wenn sie also nicht untereinander verwirbeln. Es bilden sich somit zum Beispiel glatte, zusammenhängende Stromlinien um eine Kugel herum [siehe Abbildung].

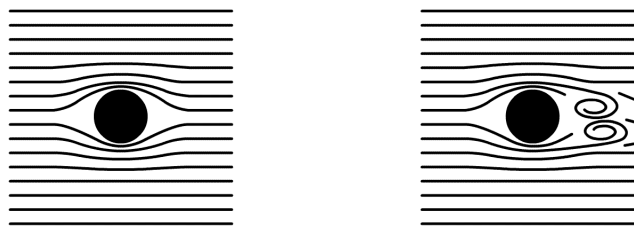


Abbildung 7 : Laminare und turbulente Strömung

Turbulente Strömung

Im Gegensatz dazu spricht man von turbulenter Strömung, wenn die Flüssigkeitsschichten untereinander verwirbeln. In diesem Fall ergeben sich verwirbelte Stromlinien. Mit Hilfe der dimensionslosen **Reynoldszahl** Re lässt sich abschätzen, ob eine Strömung laminar oder turbulent verläuft. Diese Zahl wird gegeben durch

$$Re = \frac{l \rho v}{\eta},$$

dabei ist l die Rohrlänge, ρ die Dichte, v die Durchschnittsgeschwindigkeit und η die Viskosität des strömenden Stoffes.

2.8 Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen

So komplex die Gleichungen zur Beschreibung turbulenter Strömungen sind, so einfach gestalten sie sich glücklicherweise für laminare Strömungen.

Im folgenden betrachten wir die laminare Strömung in einem Rohr mit dem Radius R , dass in einem Abschnitt der Länge l von einer Flüssigkeit der Viskosität η durchflossen wird. Die Geschwindigkeit des Flüssigkeitszylinders ergibt sich nun aus dem Gleichgewicht der Reibungskräfte F_R und der wirkenden Druckkraft F_p :

$$F_R = 2\pi r l \cdot \eta \frac{dv}{dr} \quad \text{und} \quad F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Kräfte und anschließende Trennung der Variablen folgt

$$\begin{aligned} -\frac{2\eta l}{p_1 - p_2} dv &= r dr \\ -\frac{2\eta l}{p_1 - p_2} \int dv &= \int r dr \\ -\frac{4\eta l}{p_1 - p_2} v &= r^2 + c. \end{aligned}$$

Es gilt $c = -R^2$, da am Rande des Röhrchens [also für $r = R$] die Geschwindigkeit gleich 0 ist. Man erhält somit

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Durch den Hohlzylinder, der durch r und $r + dr$ begrenzt wird, fließt somit in der Zeit t die Menge dV , für die die Gleichung

$$dV = 2\pi r v t dr = \frac{\pi t (p_1 - p_2)}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr$$

gilt. Durch Integrieren gilt somit für den gesamten Durchschnitt

$$V(t) = \int_0^R \frac{\pi t (p_1 - p_2)}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} t,$$

man erhält nun das Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4.$$

Für das Volumen des Zylinders mit dem Radius R , aus dem das Wasser abfließt, gilt außerdem der Zusammenhang $dV = \pi r^2 dh$. Der Druck wird in dem vorliegenden Versuch allein durch die Gravitation bestimmt, somit ist $\Delta p = \rho gh$, so dass sich zusammen mit der oben hergeleiteten Gleichung gerade ergibt:

$$\pi r^2 dh = - \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4 dt = - \frac{\pi \rho gh}{8\eta l} R^4 dt.$$

Man erhält nun durch Umformungen und wiederholtes trennen der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dh}{h} &= - \frac{\rho g}{8\eta l r^2} R^4 dt \\ \log h &= - \frac{\rho g}{8\eta l r^2} R^4 t + c_0 \\ h(t) &= \exp\left(- \frac{\rho g}{8\eta l r^2} R^4 t + c_0\right) = h_0 \cdot \exp\left(- \frac{\rho g}{8\eta l r^2} R^4 t\right). \end{aligned}$$

Dieses Exponentialgesetz wird bei der Auswertung zur Anwendung kommen.

2.9 Die Mohrsche Waage

Abschließend soll nun kurz die Mohrsche Waage erklärt werden, da diese während des Versuches mehrfach genutzt wird.

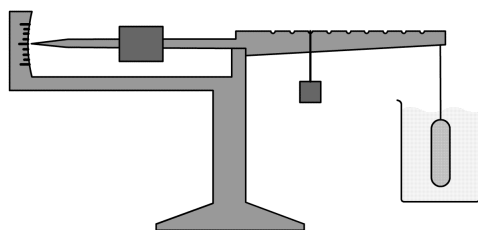


Abbildung 8 : Aufbau der Mohrschen Waage

Die Mohrsche Waage dient dazu, Dichten von Flüssigkeiten zu vergleichen. Sie besteht aus einem Waagarm, an den in regelmässigen Abständen Gewichte gehängt werden können. Ein Tauchkörper wird in der Flüssigkeit vollständig versenkt, und dann die Waage ins Gleichgewicht gebracht. Man notiert die Position der Gewichte, die man dabei verwendet hat. Um die Dichte einer unbekanntenen Flüssigkeit zu bestimmen, eicht man die Waage zunächst auf Wasser, dessen Dichte bekannt ist [1 g/cm^3]. Danach wird die Messung mit der zu untersuchenden Flüssigkeit durchgeführt. Das Verhältnis der Hebelkräfte entspricht dann dem Verhältnis der Dichten:

Gibt es k Positionen für Gewichte und sind m_i die Gesamtmassen an der Positionen n_i für $i = 1, \dots, k$, so berechnet sich das Verhältnis durch

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{\sum_{i=1}^k m_{ia} n_i}{\sum_{i=1}^k m_{ib} n_i}.$$

3 Versuchsdurchführung

Zunächst werden drei Kapillaren [zur besseren Unterscheidung mit rot, grün und blau markiert] gründlich gereinigt und die Radien unter dem Mikroskop bestimmt und notiert [dreimal].

3.1 Kapillarität

In diesem Teil des Versuchs werden die Steighöhen von drei unterschiedlichen Flüssigkeiten [Wasser, Methylalkohol und Ethylenglykol] in den drei Kapillaren von unterschiedlichem Durchmesser gemessen. Weiterhin werden die Dichten dieser Flüssigkeiten anhand der Mohrschen Waage bestimmen.

Es sollen daraus die Oberflächenspannungen der einzelnen Flüssigkeiten bestimmt werden.

3.2 Innere Reibung

Zunächst wird das Volumen eines Glasgefäßes zwischen den Strichmarken 50 und 45, die Länge l der Kapillaren und die Temperatur T von destillierten

Wasser gemessen.

Anhand von zwei Versuchen soll nun die Viskosität von Wasser bestimmt werden.

Ausflusszeit durch die Kapillaren

Es wird dreimal die Ausflusszeit t_A von destilliertem Wasser zwischen den Strichmarken 50 und 45 des Glasgefäßes gemessen, indem man jede Kapillare einmal an das Gefäß anschließt.

Ausflusszeit in Abhängigkeit der Höhe

Nur für die Kapillare mit dem kleinsten Durchmesser wird die Ausflusszeit $t(h)$ in Abhängigkeit der Höhe h gemessen. Hierzu werden mindestens 10 Werte notiert.

4 Auswertung

Bei der Bestimmung der Radien r der Kapillaren erzielten wir folgende Ergebnisse:

	Radius
rot	$0.042 \pm 0.01 \text{ cm}$
grün	$0.087 \pm 0.01 \text{ cm}$
blau	$0.058 \pm 0.01 \text{ cm}$

4.1 Kapillarität

Durch das Prinzip der Mohrschen Waage berechneten wir die Dichten ρ der zu analysierenden Stoffe folgendermassen:

	experimentell	Literaturwert
Wasser	1.000 g/cm^3	1.000 g/cm^3
Methylalkohol	$0.803 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3$	0.810 g/cm^3
Ethylenglykol	$1.379 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3$	1.113 g/cm^3

[Der Literaturwert von Methylalkohol ist aus dem "Handbuch Alkohol – Österreich", 2. Auflage, aufgerufen unter

<http://www.api.or.at/akis/download/01hbao.pdf>.

Der Literaturwert von Ethylenglykol ist nach Carstens, J. (2003): "Bestimmung von Ethylenglykol aus biologischen Proben", aufgerufen unter

<http://tumb1.biblio.tu-muenchen.de/publ/diss/ch/2003/carstens.pdf>.]

Der Mittelwert der Höhendifferenz h beim Eintauchen der Kapillare ist:

	Wasser	Methylalkohol	Ethylenglykol
rot	$3.20 \pm 0.2 \text{ cm}$	$1.25 \pm 0.2 \text{ cm}$	$1.93 \pm 0.2 \text{ cm}$
grün	$1.43 \pm 0.2 \text{ cm}$	$0.55 \pm 0.2 \text{ cm}$	$0.63 \pm 0.2 \text{ cm}$
blau	$2.28 \pm 0.2 \text{ cm}$	$0.97 \pm 0.2 \text{ cm}$	$1.32 \pm 0.2 \text{ cm}$

Die Oberflächenspannung der einzelnen Stoffen kann nun durch die oben hergeleitete Formel

$$\sigma_x = \frac{1}{2} h \varrho r g$$

berechnet werden. Wir erhielten folgende Werte in g/s^2 :

	Wasser	Methylalkohol	Ethylenglykol
rot	65.40 ± 16.22	20.51 ± 6.45	54.47 ± 14.77
grün	60.93 ± 11.03	18.77 ± 7.53	37.12 ± 12.77
blau	65.33 ± 12.58	22.35 ± 6.58	51.94 ± 12.48

Den Fehler hierbei berechneten wir über die Fehlerfortpflanzung mittels

$$\begin{aligned} \sigma_{\sigma_x} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial h} \sigma_h\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varrho} \sigma_\varrho\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \sigma_r\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(\varrho r g \sigma_h)^2 + (h r g \sigma_\varrho)^2 + (h \varrho g \sigma_r)^2}. \end{aligned}$$

Durch die gewichteten Mittelwerte der Oberflächenspannungen berechneten wir folgende Endergebnisse in g/s^2 :

	Wasser	Methylalkohol	Ethylenglykol
Ergebnis	63.37 ± 7.38	20.69 ± 3.93	47.31 ± 7.64
Literaturwert	72.75	22.60	31.40

[Die Literaturwerte von Wasser und von Methylalkohol sind nach "Wikipedia", aufgerufen unter

<http://de.wikipedia.org/wiki/Oberfl%C3%A4chenspannung>.

Der Literaturwert von Ethylenglykol ist nach der Abteilung Organische Chemie III: "Praktikum Makromolekulare Chemie", aufgerufen unter

<http://www.uni-ulm.de/oc3/studies/gprakt/v28.pdf>]

Die Ergebnisse von Wasser und von Methylalkohol sind zufriedenstellend, die Abweichung von ca. 40 % bei Ethylenglykol ist dadurch zu begründen, dass schon die gemessene Dichte eine recht große Abweichung zum Literaturwert aufweist.

4.2 Innere Reibung

Ausflusszeit durch die Kapillaren

Nach dem oben hergeleiteten Gesetz von Hagen-Poiseuille erhält man

$$\Delta V = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta l} R^4 t_A \quad \Leftrightarrow \quad \eta = \frac{\pi \Delta p}{8 \Delta V l} R^4 t_A.$$

Die Größe R wurde bereits oben berechnet und für die Zeiten t_A wurden folgende Werte in s gemessen:

rot	72.22 ± 0.361
grün	5.84 ± 0.039
blau	22.8 ± 0.124

Somit müssen nun noch die Größen Δp und ΔV ermittelt werden.

Aus der Geometrie des Glasgefäßes erhalten wir

$$\Delta V = 1.9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

und die Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2 = p_1$ berechnet sich zu

$$\Delta p = p_1 = \rho g h = 1000 \cdot 9.81 \cdot 0.475 \text{ Pa} \approx 4660 \pm 200 \text{ Pa},$$

da $p_2 = 0$ gilt. Dabei ist ρ die Dichte von Wasser in kg/m^3 , g ist die Erdbeschleunigung und h die Höhe, im Mittel 0.475 m .

Wir erhielten nun folgende Werte für die Viskosität η in $Pa \cdot s$:

rot	0.00089 ± 0.00085
grün	0.00138 ± 0.00063
blau	0.00111 ± 0.00076

Den Fehler hierbei berechneten wir über die Fehlerfortpflanzung mittels

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t_A} \sigma_{t_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \Delta p} \sigma_{\Delta p}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi \Delta p}{2 \Delta V l} R^3 t_A \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{\pi \Delta p}{8 \Delta V l} R^4 \sigma_{t_A}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{8 \Delta V l} R^4 t_A \sigma_{\Delta p}\right)^2} \end{aligned}$$

Die Fehler von ΔV und l haben wir vernachlässigt, da diese schon recht gering waren.

Durch den gewichteten Mittelwert erhalten wir folgendes Endergebnis der Viskosität:

$$\eta = 0.001173 \pm 0.000424 \text{ Pa} \cdot s.$$

Der Literaturwert zum Vergleich ist bei $20^\circ C$ gerade

$$\eta = 0.001025 \text{ Pa} \cdot s.^1$$

¹Nach Schaaf, P. (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsverlag Göttingen

Ausflusszeit in Abhängigkeit der Höhe

Aus dem Exponent des oben hergeleiteten Gesetzes

$$h(t) = h_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho g}{8\eta l r^2} R^4 t\right)$$

soll nun auch die Viskosität von Wasser bestimmt werden. Dazu trägt man die Werte $\log(h)$ gegen t auf und erhält eine Gerade mit der Steigung

$$m = -\frac{\rho g}{8\eta l r^2} R^4,$$

dabei ist r der Radius des Glasgefäßes und R der Radius der Kapillare.

Durch lineare Regression erhalten wir

$$m = -0.00255 \pm 0.00012 \text{ s}^{-1}.$$

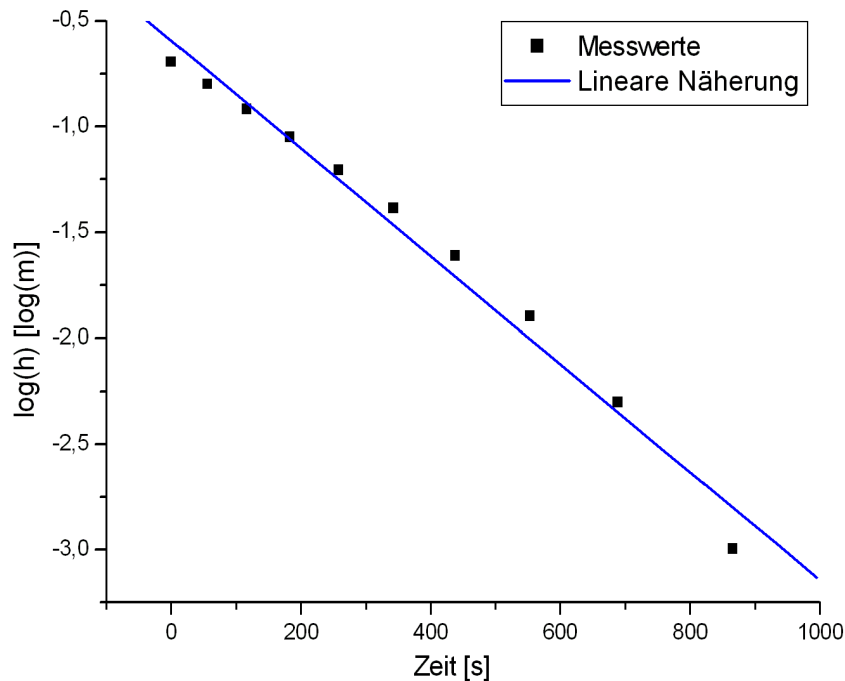


Abbildung 9 : Logarithmische Steighöhe in Abhängigkeit der Zeit

Die Viskosität η kann nun sofort mittels

$$\eta = -\frac{\rho g}{8m l r^2} R^4$$

berechnet werden. Wir erhalten dabei einen Fehler von

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial m} \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \sigma_R\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\rho g}{8m^2 l r^2} R^4 \sigma_m\right)^2 + \left(-\frac{\rho g}{2m l r^2} R^3 \sigma_R\right)^2}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Fehler von l und von r vernachlässigt haben.

Aus unseren Messungen berechneten wir folgendes Endergebnis der Viskosität:

$$\eta = 0.00052 \pm 0.00050 \text{ Pa s.}$$

Der Literaturwert ist noch einmal zur Erinnerung bei 20°C gerade

$$\eta = 0.001025 \text{ Pa s.}^2$$

5 Diskussion

Allgemein lassen sich zunächst mehrere Fehlerquellen nennen: Zum einen war wahrscheinlich die vorliegende Messung der Kapillardurchmesser mit dem Messmikroskop nicht genau genug. Da diese Größe in vierter Potenz in die Gleichung eingeht, hat schon eine geringe Abweichung des Radius große Auswirkungen auf das Resultat. Desweiteren sind Verunreinigungen der Kapillaren trotz gründlicher Reinigung nicht auszuschließen, was natürlich die Anwendung der Hagen-Poiseuille Gleichung zunichte macht, da es nun zu ungewollten Turbulenzen in der Strömung kommen sein könnte. Auch Restbestände der anderen Flüssigkeiten an den Wänden der Kapillaren sind denkbar, was die Reibung ebenfalls verändert haben könnte.

Das Endergebnis bei der Viskosität von Wasser durch die Messungen der Ausflusszeiten durch die Kapillaren ist sehr erfreulich. Im Mittel haben sich hier alle Fehler gegeneinander aufgehoben.

Unser Endergebnis bei den Messungen der Ausflusszeiten in Abhängigkeit der Höhe ist jedoch weniger erfreulich. Wir haben eine Abweichung von rund 50% des Literaturwertes. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass der Radius der Kapillare falsch gemessen wurde. Gerade da es sich bei den Messungen um die Kapillare mit dem kleinsten Radius handelte, ist diese Erklärung denkbar.

²Nach Schaaf, P. (2005): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsverlag Göttingen