Die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe und das Zassenhaus Produkt

13. Oktober 2005

Vortrag von Daniel Scholz

Einleitung

Für nicht kommutierende Variablen x und y gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y &= \mathrm{e}^{x+y+z_2+z_3+z_4+\dots} \qquad \text{und} \\ \mathrm{e}^{x+y} &= \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y \cdot \mathrm{e}^{c_2} \cdot \mathrm{e}^{c_3} \cdot \mathrm{e}^{c_4} \cdot \dots . \end{aligned}$$

Es beschreibt nun

$$\log(\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y) = x + y + \sum_{i=2}^{\infty} z_i$$

die **Baker-Campbell-Hausdorff Reihe** und umgekehrt beschreibt

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y \cdot \prod_{i=2}^{\infty} e^{c_i}$$

das **Zassenhaus Produkt**.

Das Baker-Campbell-Hausdorff Theorem

Das Theorem

$\sum z_i$ ist eine unendliche Summe und jedes z_n besteht aus einer Linearkombination von Produkten mit n Faktoren. Jeder Faktor dieser Produkte ist entweder x oder y.

Man schreibt dafür

$$z_n = \sum_W C(W) \cdot \Pi(W),$$

dabei ist $\Pi(W)$ ein Produkt mit n Faktoren, die x oder y sind, und $C(W)$ ist der Koeffizient zu diesem Produkt.

Diese Darstellung von z_n nennen wir **Wörterdarstellung**.

Das Zassenhaus Theorem

Das Theorem

Auch c_n ist für $n \geq 2$ eine Linearkombination von Produkten mit n Faktoren. Die Faktoren der Produkte nennen wir nun a oder b. Man schreibt dafür wieder

$$c_n = \sum_{W'} C'(W') \cdot \Pi'(W'),$$

dabei ist $\Pi'(W')$ ein Produkt mit n Faktoren, die a oder b sind, und $C'(W')$ ist der Koeffizient zu diesem Produkt.

Unser Vorhaben

Ziele des Vortrags

1. Vorstellung einer einfachen Methode zur Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe [nach Reinsch].
2. Aus der Wörterschreibweise eine Kommutatorschreibweise erzielen.
3. Übertragung der Methode von Reinsch auf das Zassenhaus Produkt.
4. Wiederum aus von Wörterschreibweise zur Kommutatorschreibweise übergehen.
5. Übersicht der Ergebnisse.

Die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

Die Idee zur Berechnung

Die Idee besteht darin, dass zunächst z_n für spezielle nicht kommutierenden Matrizen M und N berechnet wird.

$$Z \ := \ \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \ = \ \log e^M e^N.$$

Zwei Besonderheiten werden dies möglich machen:

1. Durch einfache Strukturen von M und N werden sich Aussagen über die Gestalt von Z treffen lassen.
2. Die Matrix $\log e^M e^N$ wird in endlich vielen Schritten berechnen werden.

Anschließend wird es auch noch möglich sein, von den Matrizen M und N zu allgemeinen Variablen x und y zurückzukehren.

Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

Grundlagen

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus für $n \times n$ Matrizen:

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots, \\ \log(I + A) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} A^k = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \dots . \end{aligned}$$

Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

Grundlagen

Weiter werden folgende $(n+1) \times (n+1)$ Matrizen benötigt:

$$F_{ij} = \frac{1}{(j-i)!} \qquad \text{und} \qquad G_{ij} = \frac{1}{(j-i)!} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \sigma_k$$

sowie

$$M_{ij} = \delta_{i+1,j} \qquad \text{und} \qquad N_{ij} = \delta_{i+1,j}\, \sigma_i.$$

Es gilt dabei gerade

$$F = \exp M \qquad \text{und} \qquad G = \exp N.$$

Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_1 & \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2 & \dots \\ 0 & 1 & \sigma_2 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

Berechnung von $\log FG$

Es seien F, G und I nun $(n+1) \times (n+1)$ Matrizen. Dann gilt

$$(FG - I)^k \;=\; 0$$

für alle $k > n$, da $(FG - I)$ nur oberhalb der Superdiagonalen Einträge hat, die nicht Null sind.

Demnach folgt

$$\log FG \;=\; \log(I + (FG - I)) \;=\; -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}(FG - I)^k.$$

Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

Der Operator T

Es sei

$$W = \sigma_1^{\mu_1}\sigma_2^{\mu_2}\sigma_3^{\mu_3}\dots\sigma_n^{\mu_n}$$

eine Sequenz mit $\mu_i \in \{0,1\}$ für $i = 1,..,n$.

Der Operator T "übersetzt" die Sequenz W nun in ein Wort aus x und y. Ist $\mu_i = 0$, so wird $\sigma_i^{\mu_i}$ durch ein x ersetzt, und bei $\mu_i = 1$ wird $\sigma_i^{\mu_i}$ durch ein y ersetzt:

Für $n = 6$ gilt zum Beispiel

$$T(\sigma_2\sigma_4\sigma_5) = T(\sigma_1^0\sigma_2^1\sigma_3^0\sigma_4^1\sigma_5^1\sigma_6^0) = xyxyyx.$$

Behauptung

Satz 1

Sei $n \geq 1$, seien $\sigma_1, .., \sigma_n$ beliebige kommutative Variablen und seien F und G die zwei $(n+1) \times (n+1)$ Matrizen, die durch

$$F_{ij} = \frac{1}{(j-i)!} \qquad \text{und} \qquad G_{ij} = \frac{1}{(j-i)!} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \sigma_k$$

gegeben werden.

Dann ist

$$z_n = T\left((\log FG)_{1,n+1}\right)$$

das $n$te Folgenglied der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe für zwei nicht kommutative Variablen x und y.

Beweisskizze

Produkte von M und N

Ein Produkt aus m Faktoren, die entweder M oder N sind, ist eine $(n+1) \times (n+1)$ Matrix, die nur in der $m$ten Superdiagonalen Elemente hat, die nicht Null sind.

Für $n = 4$ gilt zum Beispiel

$$M \cdot N \cdot N \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3\sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweisskizze

Zusammenhang zum Baker-Campbell-Hausdorff Theorem

Nach dem Baker-Campbell-Hausdorff Theorem folgt, dass Z_n eine $(n+1) \times (n+1)$ Matrix ist, die nur oben rechts einen einzigen Eintrag hat, der ungleich Null ist.

Es gilt also

$$(Z)_{1,n+1} \;=\; (Z_n)_{1,n+1} \;=\; \left(\log\left(e^M e^N\right)\right)_{1,n+1}.$$

Wir schreiben dafür

$$\log\left(e^M e^N\right)_{1,n+1} \;=\; \sum_{W \in \mathcal{W}} C(W) \cdot (\Pi(W))_{1,n+1}.$$

Beweisskizze

Beweisabschluss

$(\Pi(W))_{1,n+1}$ ist ein Produkt aus den σ Variablen, deren Indizes die Positionen der N's im Wort W angeben. Das Anwenden des Operators T auf das rechte obere Element der Matrix $\log FG$ liefert die gleiche Linearkombination aus den x und y Variablen, wie zuvor aus den M und N Matrizen.

Zusammen mit

$$F = \exp M \qquad \text{und} \qquad G = \exp N$$

wurde damit die Behauptung gezeigt.

Beispiele

Berechnung von z_1

Für $n = 1$ gilt

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demnach folgt

$$FG = \begin{pmatrix} 1 & 1+\sigma_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \log FG = \begin{pmatrix} 0 & 1+\sigma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich somit

$$z_1 = T(\log FG)_{1,1+n} = T(1+\sigma_1) = T(\sigma_1^0 + \sigma_1^1) = x + y.$$

Beispiele

Berechnung von z_2 bis z_4

Analog erhält man

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}yx, \\ z_3 &= \frac{1}{12}yxx - \frac{1}{6}xyx + \frac{1}{12}xxy + \frac{1}{12}yyx - \frac{1}{6}yxy + \frac{1}{12}xyy, \\ z_4 &= -\frac{1}{24}yyxx + \frac{1}{12}yxyx - \frac{1}{12}xyxy + \frac{1}{24}xxyy. \end{aligned}$$

Kommutatorschreibweise

Kommutatorschreibweise nach Dynkin

Es sei

$$z_n = \sum_{W(s_1,..,s_n)} C(W) \cdot W(s_1, .., s_n)$$

ein Folgeglied der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe in der bislang beschriebenen Darstellung. Es gilt weiter $s_i = x$, wenn an der i ten Stelle im Wort W ein x steht, sonst $s_i = y$.

In Kommutatorschreibweise gilt dann

$$z_n = \sum_{W(s_1,..,s_n),\ s_1 \neq s_2} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot C(W) \cdot [s_n, [..., [s_3, [s_2, s_1]]..]].$$

Kommutatorschreibweise

Beispiel

Für $n = 3$ und

$$z_3 = \frac{1}{12}yxx - \frac{1}{6}xyx + \frac{1}{12}xxy + \frac{1}{12}yyx - \frac{1}{6}yxy + \frac{1}{12}xyy$$

ergibt sich nach diesem Verfahren also

$$z_3 = \frac{1}{36}[x,[x,y]] - \frac{1}{18}[x,[y,x]] - \frac{1}{18}[y,[x,y]] + \frac{1}{36}[y,[y,x]].$$

Kommutatorschreibweise

Vermutete Kommutatorschreibweise

Es sei wieder

$$z_n = \sum_{W(s_1,..,s_n)} C(W) \cdot W(s_1, .., s_n).$$

Es wird vermutet, dass dann gilt:

$$z_n = \sum_{W(s_1,..,s_n),\ s_1 s_2 = xy} \frac{(-1)^{n-1}}{n_x(W)} \cdot C(W) \cdot [s_n, [..., [s_3, [s_2, s_1]]..]],$$

$$z_n = \sum_{W(s_1,..,s_n),\ s_1 s_2 = yx} \frac{(-1)^{n-1}}{n_y(W)} \cdot C(W) \cdot [s_n, [..., [s_3, [s_2, s_1]]..]].$$

Diese Vermutung haben wir bis $\mathbf{n = 18}$ prüfen können.

Kommutatorschreibweise

Beispiele

Für

$$
\begin{aligned}
z_3 &= \frac{1}{12}yxx - \frac{1}{6}xyx + \frac{1}{12}xxy + \frac{1}{12}yyx - \frac{1}{6}yxy + \frac{1}{12}xyy, \\
z_4 &= -\frac{1}{24}yyxx + \frac{1}{12}yxyx - \frac{1}{12}xyxy + \frac{1}{24}xxyy
\end{aligned}
$$

erhält man somit

$$
\begin{aligned}
z_3 &= \frac{1}{12}[y,[y,x]] - \frac{1}{12}[x,[y,x]] \;=\; \frac{1}{12}[x,[x,y]] - \frac{1}{12}[y,[x,y]], \\
z_4 &= \frac{1}{24}[y,[x,[y,x]]] \;=\; -\frac{1}{24}[x,[y,[x,y]]].
\end{aligned}
$$

Das Zassenhaus Produkt

Berechnung des Zassenhaus Produktes

Die Idee zur Berechnung

Die Folgeglieder c_n des Zassenhaus Produktes werden durch

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \cdot e^{c_2} \cdot e^{c_3} \cdot e^{c_4} \cdot \ldots$$

gegeben.

Es wird nun auch hier damit begonnen, dass C_n für spezielle nicht kommutierende Matrizen P und Q berechnet wird.

Später lässt sich das Ergebnis dann wieder durch einen Operator U in beliebige Variablen a und b übersetzen.

Berechnung des Zassenhaus Produktes

Grundlagen

Es werden nun folgende $(n+1) \times (n+1)$ Matrizen benötigt:

$$J_{ij} = \frac{1}{(j-i)!} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} (1+\tau_k), \qquad K_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)!} \qquad \text{und}$$

$$L_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)!} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} \tau_k$$

sowie

$$P_{ij} = \delta_{i+1,j} \qquad \text{und} \qquad Q_{ij} = \delta_{i+1,j}\, \tau_i .$$

Berechnung des Zassenhaus Produktes

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \tau_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dabei gerade

$$J = \exp(P+Q), \quad K = \exp(-P) \quad \text{und} \quad L = \exp(-Q).$$

Berechnung des Zassenhaus Produktes

Der Operator U

Der Operator U ist das Gegenstück zum Operator T. Es sei

$$W = \tau_1^{\mu_1}\tau_2^{\mu_2}\tau_3^{\mu_3}\dots\tau_n^{\mu_n}$$

eine Sequenz mit $\mu_i \in \{0,1\}$ für $i = 1,..,n$.

Der Operator U "übersetzt" die Sequenz W nun in ein Wort aus a und b:

Für $n = 6$ gilt zum Beispiel

$$U(\tau_1\tau_3\tau_4) = U(\tau_1^1\tau_2^0\tau_3^1\tau_4^1\tau_5^0\tau_6^0) = babbaa.$$

Behauptung

Satz 2

Sei $n \geq 2$, seien $\tau_1, .., \tau_n$ beliebige kommutative Variablen und seien J, K und L sowie P und Q die bekannten $(n+1) \times (n+1)$ Matrizen.

Dann ist

$$c_n = U\left(\left(e^{-C_{n-1}} \cdot e^{-C_{n-2}} \cdot \ldots \cdot e^{-C_2} \cdot L \cdot K \cdot J\right)_{1,n+1}\right)$$

das $n$te Folgenglied des Zassenhaus Produktes, dabei ist C_m für $m < n$ jeweils das spezielle $m$te Folgenglied aus den nicht kommutierenden Matrizen P und Q.

Beweisskizze

Produkte von P und Q

Ganz analog zu den Matrizen M und N ist ein Produkt aus m Faktoren, die entweder P oder Q sind, eine $(n+1) \times (n+1)$ Matrix ist, die nur in der $m$ten Superdiagonalen Elemente hat, die nicht Null sind.

Insbesondere ist also ein Produkt mit k Faktoren genau dann die Nullmatrix, wenn $k > n$ gilt.

Beweisskizze

Zusammenhang zum Zassenhaus Theorem

Nach dem Zassenhaus Theorem folgt wieder, dass C_n eine $(n+1) \times (n+1)$ Matrix ist, die nur oben rechts einen einzigen Eintrag hat, der ungleich Null ist.

Die grundlegenden Gleichung

$$e^{P+Q} \;=\; e^{P} \cdot e^{Q} \cdot e^{C_2} \cdot e^{C_3} \cdot e^{C_4} \cdot \ldots$$

kann nun für alle $n \in \mathbb{N}$ durch das endliche Produkt

$$e^{P+Q} \;=\; e^{P} \cdot e^{Q} \cdot e^{C_2} \cdot e^{C_3} \cdot \ldots \cdot e^{C_n}$$

beschrieben werden, da $e^{C_k} = I$ für $k > n$ gilt.

Beweisskizze

Zusammenhang zum Zassenhaus Theorem

Durch linksseitiges anmultiplizieren erhält man nun

$$\begin{aligned} e^{C_n} &= \left(e^{C_{n-1}}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(e^{C_2}\right)^{-1} \cdot \left(e^{Q}\right)^{-1} \cdot \left(e^{P}\right)^{-1} \cdot e^{P+Q} \\ &= e^{-C_{n-1}} \cdot \ldots \cdot e^{-C_2} \cdot e^{-Q} \cdot e^{-P} \cdot e^{P+Q}. \end{aligned}$$

Das obere rechte Element von e^{C_n}

Da C_n nur oben rechts einen einzigen Eintrag hat, der ungleich Null ist, gilt $e^{C_n} = I + C_n$. Wir haben also nun

$$(C_n)_{1,n+1} = \left(e^{C_n}\right)_{1,n+1} = \left(e^{-C_{n-1}} \cdot \ldots \cdot e^{-Q} \cdot e^{-P} \cdot e^{P+Q}\right)_{1,n+1}.$$

Beweisskizze

Beweisabschluss

Nach Zassenhaus schreiben wir nun

$$(C_n)_{1,n+1} \;=\; \sum_{W\in\mathcal{W}} C(W)\cdot(\Pi(W))_{1,n+1}.$$

$(\Pi(W))_{1,n+1}$ ist dabei ein Produkt aus den τ Variablen, deren Indizes die Positionen der Q's im Wort W angeben. Das Anwenden des Operators U liefert nun wieder die gleiche Linearkombination aus den a und b Variablen, wie zuvor aus den P und Q Matrizen.

Zusammen mit

$$J = \exp(P+Q), \qquad K = \exp(-P) \quad \text{und} \quad L = \exp(-Q).$$

wurde damit die Behauptung gezeigt.

Beispiele

Berechnung von c_2

Für $n = 2$ gilt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -\tau_1 & \frac{1}{2}\tau_1\tau_2 \\ 0 & 1 & -\tau_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & (1+\tau_1) & \frac{1}{2}(1+\tau_1)(1+\tau_2) \\ 0 & 1 & (1+\tau_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiele

Berechnung von c_2

Damit folgt

$$L \cdot K \cdot J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\tau_1 - \frac{1}{2}\tau_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

somit erhalten wir

$$c_2 = U\left(\frac{1}{2}\tau_1 - \frac{1}{2}\tau_2\right) = \frac{1}{2}U(\tau_1^1\tau_2^0 - \tau_1^0\tau_2^1) = \frac{1}{2}ba - \frac{1}{2}ab.$$

Beispiele

Berechnung von c_3 und c_4

Analog erhält man

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{2}{3}bab - \frac{1}{3}aba - \frac{1}{3}abb - \frac{1}{3}bba + \frac{1}{6}baa + \frac{1}{6}aab, \\ c_4 &= -\frac{1}{24}aaab + \frac{1}{8}aaba + \frac{1}{8}aabb - \frac{1}{8}abaa - \frac{1}{4}abab - \frac{1}{8}abbb \\ &\quad + \frac{1}{24}baaa + \frac{1}{4}baba + \frac{3}{8}babb - \frac{1}{8}bbaa - \frac{3}{8}bbab + \frac{1}{8}bbba. \end{aligned}$$

Kommutatorschreibweise

Vermutete Kommutatorschreibweise

Es sei

$$c_n = \sum_{W(t_1,..,t_n)} C(W) \cdot W(t_1, .., t_n)$$

ein Folgeglied des Zassenhaus Produktes in der bislang verwendeten Darstellung. Es gilt weiter $t_i = a$, wenn an der i ten Stelle im Wort W ein a steht, sonst $t_i = b$.

Es wird vermutet, dass dann gilt:

$$c_n = \sum_{W(t_1,..,t_n),\ t_1 t_2 = ba} \frac{1}{n_b(W)} \cdot C(W) \cdot [[..[[t_1, t_2], t_3], ...], t_n]\,,$$

$$c_n = \sum_{W(t_1,..,t_n),\ t_1 t_2 = ab} \frac{1}{n_a(W)} \cdot C(W) \cdot [[..[[t_1, t_2], t_3], ...], t_n]\,.$$

Kommutatorschreibweise

Beispiel

Für $n = 4$ und

$$\begin{aligned} c_4 &= -\frac{1}{24}aaab + \frac{1}{8}aaba + \frac{1}{8}aabb - \frac{1}{8}abaa - \frac{1}{4}abab - \frac{1}{8}abbb \\ &\quad + \frac{1}{24}baaa + \frac{1}{4}baba + \frac{3}{8}babb - \frac{1}{8}bbaa - \frac{3}{8}bbab + \frac{1}{8}bbba. \end{aligned}$$

erhält man also

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{24}[[[b,a],a],a] + \frac{1}{8}[[[b,a],b],a] + \frac{1}{8}[[[b,a],b],b] \\ &= -\frac{1}{24}[[[a,b],a],a] - \frac{1}{8}[[[a,b],a],b] - \frac{1}{8}[[[a,b],b],b]. \end{aligned}$$

Ergebnisse

Ergebnisse

Die wichtigsten Ergebnisse

1. Es wurden Algorithmen und dazu *Mathematica* Implementierungen entwickelt, um die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe und das Zassenhausprodukt effizient berechnen zu können.

Ergebnisse

Die wichtigsten Ergebnisse

1. Es wurden Algorithmen und dazu *Mathematica* Implementierungen entwickelt, um die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe und das Zassenhausprodukt effizient berechnen zu können.
2. Es wurde eine zufriedenstellende Kommutatorschreibweise erzielt, auch wenn es bislang nur eine Vermutung ist, die bis z_{18} und c_{17} überprüft werden konnte.

Ergebnisse

Die wichtigsten Ergebnisse

1. Es wurden Algorithmen und dazu *Mathematica* Implementierungen entwickelt, um die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe und das Zassenhausprodukt effizient berechnen zu können.
2. Es wurde eine zufriedenstellende Kommutatorschreibweise erzielt, auch wenn es bislang nur eine Vermutung ist, die bis z_{18} und c_{17} überprüft werden konnte.
3. Die grundsätzliche Methode konnte auch auf die verallgemeinerte q-Exponentialfunktion übertragen werden, allerdings ohne Kommutatorschreibweise.

Anhang

Die q-Exponentialfunktion

Definitionen

Es sei

$$[k]_q \;:=\; \frac{1-q^k}{1-q} \;=\; \sum_{i=0}^{k-1} q^i \;=\; 1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}\,,$$

$$[k]_q! \;:=\; [1]_q \cdot [2]_q \cdot \ldots \cdot [k]_q \qquad \text{mit} \qquad [0]! \;:=\; 1.$$

Die q-**Exponentialfunktion** e_q wird nun definiert durch

$$\mathrm{e}_q(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} \;=\; 1+x+\frac{1}{[2]_q}x^2+\frac{1}{[2]_q[3]_q}x^3+\ldots$$

$$=\; 1+x+\frac{x^2}{(1+q)}+\frac{x^3}{(1+q)(1+q+q^2)}+\ldots\,.$$

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

Cigler, J. (1982):
Elementare q-Identitäten.
Séminaire Lotharingien de Combinatoire **182**, 261-267.

Dynkin, E.B. (1949):
On the representation by means of commutators of the series $\log e^x e^y$ *for noncommuting* x, y.
Mathematic Mathematicheskii **67**, 155-162 [in russisch].

Goldberg, K. (1956):
The formal power series for $\log e^x e^y$.
Duke Mathematical Journal **23**, 13-21.

Literaturverzeichnis

Klarsfeld, S., Oteo, J.A. (1989):
The Baker-Campbell-Hausdorff formula and the convergence of the Magnus expansion.
Journal of Physics **22**, 4565-4572.

Magnus, W. (1954):
On the Exponential Solution of Differential Equations for a Linear Operator.
Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume **VII**, 649-673.

Oteo, J.A. (1991):
The Baker-Campbell-Hausdorff formula and nested commutator identities.
Journal of Mathematical Physics **32**, 419-424.

Literaturverzeichnis

Quesne, C. (2004):
Disentangling q-Exponentials: A General Approach.
International Journal of Theoretical Physics **43**, 545-559.

Reinsch, M.W. (2000):
A simple expression for the terms in the Baker-Campbell-Hausdorff series.
Journal of Mathematical Physics **41**, 2434-2442.

Sridhar, R., Jagannathan R. (2002):
On the q-analogues of the Zassenhaus formula for disentangling exponential operators.
Journal of Computational and Applied Mathematics **160**, 297-305.

Literaturverzeichnis

Wilcox, R.M. (1966):
Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics.
Journal of Mathematical Physics **8**, 962-982.