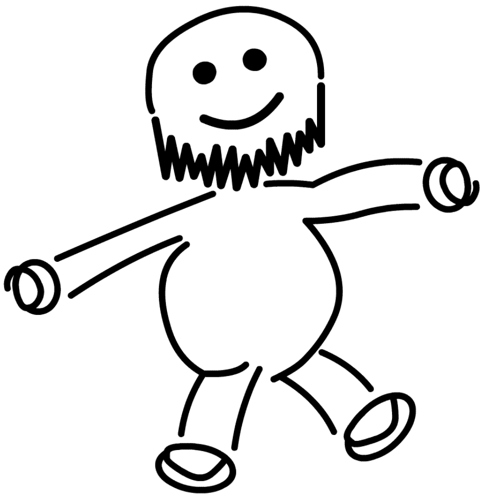
Die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe und das Zassenhaus Produkt II



Daniel Scholz im März 2006

Überarbeitete Version vom 24. März 2006.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ausgehend von [1] und [2] wollen wir unsere Erkenntnisse ausbauen und weitere Ergebnisse formulieren.

Zunächst werden wir in Kapitel 2 einige Grundlagen über Lie-Algebren und Kommutatoren zusammenstellen, siehe zum Beispiel [3]. Dies soll auch zur Einordnung der Baker-Campbell-Haudorff Reihe sowie des Zassenhaus Produktes in diesen Themenbereich bieten.

In Kapitel 3 werden wir dann die bereits in [1] angesprochenen Vermutung beweisen. Dabei gehen wir von DYNKINS Arbeiten [4] und [5] aus und übertragen seine Ideen auf unsere Vermutung.

Um das Thema abzurunden werden wir uns in Kapitel 4 mit dem Beweis des Baker-Campbell-Hausdorff Theorems und mit der Folgerung von Zassenhaus befassen.

Nach einer kurzen übersichtlichen Darstellung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe sowie des Zassenhaus Produktes in Kapitel 5 werden wir anschließend in Kapitel 6 alle uns aus der Literatur bekannten Methoden zur Berechnung dieser Reihen erklären und kritisch vergleichen.

Alle Betrachtungen führen wir auf rein algebraischer Ebene durch und nehmen dadurch bislang Abstand von Lie-Gruppen.

2 Grundlagen

2.1 Lie-Algebren

Definition 2.1.1

Eine ***Algebra*** über einen Körper K ist ein Vektorraum A über K zusammen mit einer bilinearen Multiplikation

$$\cdot : A \times A \to A.$$

Für alle $\lambda \in K$ und $a, b, c \in A$ gilt also

$$\begin{aligned}
(a+b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c, \\
a \cdot (b+c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\
\lambda \cdot (a \cdot b) &= (\lambda \cdot a) \cdot b \;=\; a \cdot (\lambda \cdot b).
\end{aligned}$$

Bemerkung

Eine Algebra A heißt ***assoziativ***, wenn für die Multiplikations das Assoziativgesetz gilt. Wenn also für alle $a, b, c \in A$

$$(a \cdot b) \cdot c \;=\; a \cdot (b \cdot c)$$

gilt. Weiter heißt A ***kommutativ***, wenn für die Multiplikation das Kommutativgesetz gilt, also

$$a \cdot b \;=\; b \cdot a.$$

Wir werden es später mit nicht kommutativen Algebren zu tun haben.

Definition 2.1.2

Eine ***Lie-Algebra*** über einen Körper K der Charakteristik $\neq 2$ ist ein Vektorraum L über K zusammen mit einer Verknüpfung

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : L \times L \to L,$$

welche ***Lie-Klammer*** heißt, und für die gilt:

(1) $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ ist bilinear, es gilt also für alle $\lambda, \mu \in K$ und $a, b, c \in L$

$$[\lambda a+\mu b, c] \;=\; \lambda[a,c]+\mu[b,c] \qquad \text{und} \qquad [a, \lambda b+\mu c] \;=\; \lambda[a,b]+\mu[a,c].$$

(2) Für alle $a, b, c \in L$ gilt die ***Jacobi-Identität***

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]] \;=\; 0.$$

(3) Es gilt $[a,a]=0$ für alle $a \in L$.

Bemerkung 1

Für eine Lie-Algebra L ergibt sich sofort für alle $a, b \in L$ die ***Antisymmetrie***

$$[a,b] \;=\; -\,[b,a],$$

denn es gilt

$$0 \;=\; [a+b, a+b] \;=\; [a,b]+[b,a].$$

Bemerkung 2

Betrachtet man $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ als Multiplikation, so kann jede Lie-Algebra L als assoziative Algebra aufgefasst werden.

Umgekehrt kann aus jeder assoziativen Algebra A eine Lie-Algebra gemacht werden, indem man als Lie-Klammer

$$[a,b] \;=\; a \cdot b - b \cdot a$$

wählt. In diesem Falle heißt die Lie-Klammer dann ***Kommutator***.

Beispiele 2.1.3

Wir betrachten die zwei für uns wichtigsten Beispiele für Lie-Algebren.

(1) Der ***Polynomring*** $\mathcal{K} = K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K kann mit überlicher skalaren Multiplikation und Addition auch als Vektorraum aufgefasst werden. Weiter besitzt $\mathcal{K}$ auch eine bilineare und assoziative Multiplikation, somit ist $\mathcal{K}$ eine assoziative Algebra über K. Diese Algebra ist genau dann kommutativ, wenn die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ kommutativ sind. Ist dies nicht der Fall, so erhalten wir eine nicht triviale Lie-Algebra mit dem Kommutator als Lie-Klammer.

(2) Die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, K)$ ist die Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Elementen aus einem Körper K. Die Gruppenverknüfung ist dabei die Matrixmultiplikation. Wählt man wieder den Kommutator als Lie-Klammer, so erhalten wir die allgemeine lineare Lie-Algebra $gl(n, K)$.

2.2 Freier assoziativer Ring

Bei den folgenden Rechenregeln für Kommutatoren und bei der Untersuchung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe sowie des Zassenhaus Produktes befinden wir uns stets in einer bestimmten Lie-Algebra, welche wir in Abschnitt 2.3 über einen Polynomring beschreiben werden. Auch später werden wir einige Male mehr mit Worten angeben, was für Strukturen wir gerade untersuchen, anstatt eine formale Definition zu liefern.

Um möglichst alle Unklarheiten im Vorfeld zu beseitigen, wollen wir an dieser Stelle eine weitere formale Definition der Lie-Algebra bringen, welche wir im Folgenden untersuchen werden.

Definition 2.2.1

Sei K ein Körper der Charakterisik 0 und sei $\mathcal{R} = K[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring über K in den freien ***Erzeugenden*** $x_1, \ldots, x_n$. Addition und Multiplikation unterliegen also dem Assoziativ- und dem Distributivgestzt, die Kommutativität ist nur bei der Addition gegeben. ***Frei*** bedeutet, dass es keine Beziehungen zwischen den Erzeugenden gibt, dass also keine allgemeinen Rechenregeln – insbesondere Kommutativität – angewendet werden dürfen. Diesen Ring bezeichnen wir daher als ***freien assoziativen Ring***.

Wir führen eine weitere Multiplikation ein:

$$[x, y] \; := \; xy - yx.$$

Damit gilt wie üblich Bilinearität sowie

$$\begin{aligned} [x, x] &= 0, \\ [x, y] + [y, x] &= 0, \\ [[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] &= 0, \end{aligned}$$

wir erhalten also ein ***Lie-Algebra*** und bezeichnen die neue Multiplikation als ***Kommutator***.

Ein ***Lie-Elemente*** aus dieser Lie-Algebra ist ein Element, dass sich ohne überlicher Multiplikation zwischen zwei Erzeugern darstellen lässt. So ist zum Beispiel

$$[[x, y], [z, y]] + [[[z, y], z], z] + [z, x]$$

ein Lie-Element,

$$[[x, y], z] + xx \qquad \text{und} \qquad [[[y, x], xx], z]$$

hingegen nicht. Ein ***homogenes*** Lie-Element ist ein Lie-Element, bei dem alle Kommutatoren die gleiche Anzahl von Faktoren besitzen, also zum Beispiel

$$[[x, y], [z, y]] + [[[z, y], z], z] + [x, [z, [z, x]]] + [[[z, y], y], y].$$

Bemerkung

In Kapitel 3 werden wir uns nach dieser Definition mit linearen Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren beschäfftigen. Da aber unser hauptsächliches Ziel ist, die Erkenntnisse aus Kapitel 3 auf die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe und das Zassenhaus Produkt anzuwenden, werden wir unsere Untersuchungen sehr algebraisch angehen und zwischen Polynomen und Kommutatoren unterscheiden.

Ausblick 2.2.2

Ein Ziel in der Theorie über Lie-Algebren und Lie-Gruppen ist es zu zeigen, dass es für alle X und Y aus einer beliebigen abgeschlossenen Lie-Unteralgebra eine Umgebung von 0 gibt, so dass auch

$$\log\left(\mathrm{e}^X \cdot \mathrm{e}^Y\right)$$

aus dieser Unteralgebra ist, seihe zum Beispiel [3]. Dazu muss natürlich eine geeignete Norm definiert werden. Das Ergebnis liefert eine Potenzreihendarstellung von $\log\left(\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y\right)$ in X und Y, die in der geeignet gewählten Umgebung von 0 konvergiert. Daraus erhält man auch die folgende Erkenntnis: Wenn X und Y Lie-Elemente sind, dann ist auch $\log\left(\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y\right)$ ein Lie-Element.

Wir hingegen untersuchen die Lie-Algebra eines freien assoziativen Ringes aus zwei Erzeugern x und y und betrachten den Spezialfall

$$\log\left(\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y\right).$$

Als Ergebnis erhalten wir dabei auch ein Lie-Element, welches wir rein algebraisch berechnen wollen. Unser Ergebnis stimmt natürlich mit der allgemeinen Potenzreihendarstellung überein, eine Konvergenzaussage ist für unsere Zwecke aber nicht notwenig.

2.3 Rechenregeln für Kommutatoren

Sei K ein Körper der Charakterisik 0 und sei $\mathcal{R} = K[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring mit nicht kommutativen Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ über K. Wir haben bereits beschrieben, dass $\mathcal{R}$ eine assoziative Algebra ist und somit durch den Kommutator zur Lie-Algebra wird.

Wir wollen einige Rechenregeln der Kommutatoren untersuchen. Dabei verstehen wir unter ***linksseitigen Kommutatoren*** Kommutatoren der Form

$$[[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots], x_n].$$

Satz 2.3.1

Jeder beliebig verschachtelte Kommutator lässt sich als Linearkombination von linksseitigen verschachtelten Kommutatoren darstellen.

Beispiel

Es gilt zum Beispiel

$$[[a,b],[a,c]] \;=\; [[[a,b],a],c] - [[[a,b],c],a].$$

Beweis

Wir führen einen iterativen Beweis und greifen dabei nur auf die Antisymmetrie, die Bilinearität und die Jacobi-Identität für Kommutatoren zurück.

Jeder ganz beliebig verschachtelte Kommutator C kann durch zwei verschachtelte Kommutatoren C_1 und C_2 mit

$$C \;=\; [C_1, C_2]$$

erzeugt werden. Auf gleiche Art und Weise unterteilen wir auch C_1 und C_2 und so weiter. Wir untersuchen nun die Kommutatoren

$$K \;=\; [X, A]\,,$$

die aus zwei linksseitigen Kommutatoren X und A bestehen. Wenn wir den Kommutator K in eine Linearkombination von linksseitigen Kommutatoren umformen können, dann können wir die Bilinearität nutzen und haben den ursprünglich zu untersuchenden Kommutator in eine Linearkombination von verschachtelten Kommutatoren gebracht, in welcher jeder Kommutator um einen iterativen Schritt weniger verschachtelt ist. Daran erkennen wir, dass die Behauptung nur für

$$K \;=\; [X, A]$$

gezeigt werden muss, wobei X und A weiterhin zwei linksseitige Kommutatoren sind.

Sei also

$$A \;=\; [[\ldots[[a_1,a_2],a_3],\ldots],a_n] \quad \text{und} \quad X \;=\; [[\ldots[[x_1,x_2],x_3],\ldots],x_m].$$

Mit $A^{(k)}$ und $X^{(k)}$ werden wir für $k \leq n$ die folgenden Kommutatoren bezeichnen:

$$\begin{aligned} A^{(k)} &:= [[\ldots[[a_1,a_2],a_3],\ldots],a_k], \\ X^{(k)} &:= [[\ldots[[X,a_k],a_{k+1}],\ldots],a_n]. \end{aligned}$$

Je kleiner das k wird, aus desto mehr Variablen besteht $X^{(k)}$ und weniger Variablen besteht $A^{(k)}$. Für alle k bleiben $A^{(k)}$ und $X^{(k)}$ aber linksseitige Kommutatoren. Damit wenden wir die Jacobi-Identität auf K an:

$$K \;=\; [X,\, A]$$

$$
\begin{aligned}
&= +\left[X,\,\left[A^{(n-1)},\,a_n\right]\right]\\
&= -\left[a_n,\,\left[X,\,A^{(n-1)}\right]\right]-\left[A^{(n-1)},\,[a_n,\,X]\right]\\
&= +\left[\left[X,\,A^{(n-1)}\right],\,a_n\right]-\left[[X,\,a_n]\,,\,A^{(n-1)}\right]\\
&= +\left[\left[X,\,\left[A^{(n-2)},\,a_{n-1}\right]\right],\,a_n\right]-\left[X^{(n)},\,\left[A^{(n-2)},\,a_{n-1}\right]\right]\\
&= \dots\,.
\end{aligned}
$$

Dieses Verfahren können wir iterativ fortführen, bis sich $A^{(1)} = a_1$ ergibt. Wir erhalten damit am Ende eine Schreibweise für K, die aus 2^{n-1} linksseitigen Kommutatoren besteht. □

Lemma 2.3.2

Sei $[[\dots[x_1, x_2], \dots], x_n]$ ein beliebiger linksseitiger Kommutator und sei $k \in \{1, \dots, n\}$ fest.

Dann gibt es $c_{kj_2\dots j_n} \in \{-1, 0, 1\}$, so dass

$$[[\dots[x_1, x_2], \dots], x_n] \;=\; \sum c_{kj_2\dots j_n}\,[[\dots[x_k, x_{j_2}], \dots], x_{j_n}] \tag{2.1}$$

gilt. Dabei werden durch $j_2, \dots, j_n$ alle möglichen Permutationen der Zahlen $1, \dots, k-1, k+1, n$ gegeben.

Beweis

Dieser Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 2.3.1, wir nutzen die Antisymmetrie, die Bilinearität und die Jacobi-Identität für Kommutatoren. Weiter führen wir eine Induktion über n.

Als Induktionsanfang können wir $n = 1, 2, 3$ oder $n = 4$ wählen. Der Fall $n = 1$ ist trivival, $n = 2$ ergibt sich sofort aus der Antisymmetrie und $n = 3$ erhalten wir durch die Anwendung der Jacobi-Identität und wiederum der Antisymmetrie. Um das Problem zu verdeutlichen, zeigen wir noch den Fall $n = 4$. Wir untersuchen also

$$[[[x_1, x_2], x_3], x_4].$$

Für die Fälle $k = 1, 2, 3$ ist nichts mehr zu zeigen, die Behauptung folgt dann aus den zuvor besprochenen Fällen sowie der Bilinearität. Etwas schwieriger wird die Situation für $k = 4$. Aber auch hier können wir durch zweifache Anwendung der Jacobi-Identität die Behauptung zeigen:

$$
\begin{aligned}
[[[x_1, x_2], x_3], x_4] &= -[[x_3, x_4], [x_1, x_2]] - [[x_4, [x_1, x_2]], x_3]\\
&= +[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] + [[[x_1, x_2], x_4], x_3]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -[[x_2,[x_3,x_4]],x_1] - [[[x_3,x_4],x_1],x_2] \\
&\quad -[[[x_4,x_1],x_2],x_3] - [[[x_2,x_4],x_1],x_3] \\
&= -[[[x_4,x_3],x_2],x_1] + [[[x_4,x_3],x_1],x_2] \\
&\quad -[[[x_4,x_1],x_2],x_3] + [[[x_4,x_2],x_1],x_3].
\end{aligned}
$$

Nun machen wir die Induktionsannahme, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte. Es gibt also für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ Koeffizienten $c_{kj_2\dots j_n} \in \{-1,0,1\}$, so dass

$$
[[\dots[x_1,x_2],\dots],x_n] \;=\; \sum c_{kj_2\dots j_n}\,[[\dots[x_k,x_{j_2}],\dots],x_{j_n}]
$$

gilt.

Wir wollen nun von n auf $n+1$ schließen. Sei dazu

$$
X \;=\; [[\dots[x_1,x_2],\dots],x_n]
$$

der zu untersuchende Kommutator. Wählen wir $k < n$, so können wir auf die Induktionsannahme sowie auf die Bilinearität zurückgreifen und haben nichts zu zeigen. Wir haben also eine Darstellung von X zu finden, die aus einer Linearkombination von linksseitigen Kommutatoren besteht und bei welcher alle Kommutatoren mit x_n beginnen.

Mit $X^{(k)}$ bezeichnen wir den folgenden Kommutator:

$$
X^{(k)} \;:=\; [[\dots[[x_1,x_2],x_3],\dots],x_k].
$$

Nun nutzen wir wieder die Jacobi-Identität:

$$
\begin{aligned}
X &= \left[\left[X^{(n-2)},\,x_{n-1}\right],\,x_n\right] \\
&= -\left[[x_{n-1},\,x_n]\,,\,X^{(n-2)}\right] - \left[\left[x_n,\,X^{(n-2)}\right],\,x_{n-1}\right] \\
&= -\left[[x_{n-1},\,x_n]\,,\,X^{(n-2)}\right] + \left[\left[X^{(n-2)},\,x_n\right],\,x_{n-1}\right] \quad =: \; -Y_1 + Y_2.
\end{aligned}
$$

Bei Kommutator Y_2 können wir direkt die Induktionsannahme anwenden. Somit muss nur Y_1 weiter untersucht werden. Auch hier kann wieder die Jacobi-Identität angewendet werden:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= +\left[[x_{n-1},\,x_n]\,,\,X^{(n-2)}\right] \\
&= -\left[[x_n,\,x_{n-1}]\,,\,\left[X^{(n-3)},\,x_{n-2}\right]\right] \\
&= +\left[x_{n-2},\,\left[[x_n,\,x_{n-1}]\,,\,X^{(n-3)}\right]\right] + \left[X^{(n-3)},\,[x_{n-2},\,[x_n,\,x_{n-1}]]\right] \\
&= -\left[\left[[x_n,\,x_{n-1}]\,,\,X^{(n-3)}\right],\,x_{n-2}\right] + \left[[[x_n,\,x_{n-1}]\,,\,x_{n-2}]\,,\,X^{(n-3)}\right] \\
&=: -Z_1 + Z_2.
\end{aligned}
$$

Bei Kommutator Z_1 kann Satz 2.3.1 und die Induktionsannahme angewendet werden. Bei Z_2 können wir das Verfahren induktiv fortführen, bis wir $X^1 = x_1$ erhalten.

Damit haben wir eine Darstellung von X gefunden, die aus einer Linearkombination von linksseitigen Kommutatoren besteht und bei welcher alle Kommutatoren mit x_n beginnen.

Die Behauptung, dass alle Koeffizienten entweder -1, 0 oder 1 sind, ist leicht einzusehen, da wir ja nur die Jacobi-Idendität verwendet haben. Damit wurde die Behauptung vollständig gezeigt. □

Lemma 2.3.3

Sei $[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n]$ ein beliebiger Kommutator.

Dann gilt

$$[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; x_1 x_2 \ldots x_n + \ldots, \tag{2.2}$$

wobei nur noch Monome folgen, die nicht mit x_1 beginnen.

Beweis

Die Behauptung lässt sich recht einfach durch vollständige Induktion zeigen.

Der Fall $n = 1$ ist trivial und für $n = 2$ gilt

$$[x_1, x_2] \;=\; x_1 x_2 - x_2 x_1,$$

dies soll als Induktionsanfang dienen. Wir machen die Induktionsannahme, dass für ein $n \in \mathbb{N}$

$$[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; x_1 x_2 \ldots x_n + \ldots$$

gilt, wobei nur noch Monome folgen, die nicht mit x_1 beginnen. Nun wollen wir von n auf $n+1$ schließen. Dazu haben wir nach der Induktionsannahme sofort

$$\begin{aligned}
& [[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n], x_{n+1}] \\
= \;& [x_1 x_2 \ldots x_n + \ldots,\; x_{n+1}] \\
= \;& x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} + \ldots - x_{n+1} x_1 x_2 \ldots x_n - \ldots \\
= \;& x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} + \ldots,
\end{aligned}$$

wobei nur noch Monome folgen, die nicht mit x_1 beginnen. Dies zeigt die Behauptung. □

3 Kommutatordarstellungen für Polynome

Wir wollen nun untersuchen, in wie weit wir Polynome mit nicht kommutativen Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ als Kommutator darstellen können. Dazu erarbeiten wir zunächst das Theorem von DYNKIN aus [4]. Hiermit können bestimmte Polynome in eine grundlegende recht einfache Kommutatordarstellung übertragen werden[1].

Die Ideen von DYNKIN übertragen und erweitern wir dann auf unsere Zwecke, um die Baker-Campbell-Haudorff Reihe und das Zassenhaus Produkt in recht effizienter Weise als Kommutator darstellen zu können.

3.1 Grundlegende Definition

Definition 3.1.1

Sei weiterhin K ein Körper der Charakterisik 0 und sei $\mathcal{R} = K[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring mit nicht kommutativen Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ über K.

Mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ bezeichnen wir die kleinste Teilmenge von $\mathcal{R}$, die die folgenden Elemente enthält:

(1) Es sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$.

(2) Mit $P, Q \in \mathcal{S}$ ist auch $\lambda P + \mu Q \in \mathcal{S}$ für alle $\lambda, \mu \in K$.

(3) Mit $P \in \mathcal{S}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist auch $[P, x_k] \in \mathcal{S}$.

Bemerkung

Nach dieser Definition enthält $\mathcal{S}$ die Polynome aus $\mathcal{R}$, die eine Kommutatordarstellung aus linksseitigen verschachtelten Kommutatoren besitzen. So ist

[1] Das Wort *einfach* ist dabei im Sinne von *nicht besonders effizient* zu verstehen. Es können also weitaus bessere bzw. kompaktere Ergebnisse erzielt werden

zum Beispiel

$$P(x,y,z) \;=\; 3xyz - 3yxz - 3zxy + 3zyx - xz + zy \;=\; 3[[x,y],z] - [x,z]$$

ein Polynom aus $\mathcal{S}$,

$$U(x,y) \;=\; 6xy - xx \qquad \text{und} \qquad V(x,y,z) \;=\; 5yyy + z$$

hingegen nicht. Hier gibt es jeweils keine Kommutatordarstellung.

Definition 3.1.2

Mit $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ bezeichnen wir weiter die kleinste Teilmenge von $\mathcal{R}$, die die folgenden Elemente enthält:

(1) Es sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{T}$.

(2) Mit $P, Q \in \mathcal{T}$ ist auch $\lambda P + \mu Q \in \mathcal{T}$ für alle $\lambda, \mu \in K$.

(3) Mit $P, Q \in \mathcal{T}$ ist auch $[P, Q] \in \mathcal{T}$.

Bemerkung

Nach dieser Definition enthält $\mathcal{T}$ alle Polynome aus $\mathcal{R}$, die in irgendeiner Weise eine Kommutatordarstellung besitzen. So ist zum Beispiel

$$P(x,y,z) \;=\; 3[[x,y],[[x,y],z]] - [x,[x,[z,y]]]$$

ein Polynom aus $\mathcal{T}$. Natürlich gilt $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Satz 3.1.3

Es gilt $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

Jedes Polynom, das überhaupt irgendeine Kommutatordarstellung besitzt, lässt sich demnach als Linearkombination von linksseitigen verschachtelten Kommutatoren darstellen. Wir werden trotzdem teilweise zwischen den Mengen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ unterscheiden um zu verdeutlichen, welche Kommutatordarstellung wir meinen.

Dieser Satz ist eine direkte Folgerung aus Satz 2.3.1.

3.2 Polynome in einfacher Kommutatordarstellung

Definition 3.2.1

Jedes Polynom P aus $\mathcal{R}$ kann geschrieben werden als

$$P(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sum_i a_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},$$

dabei können die $i_1, \ldots, i_k$ die Werte $1, \ldots, n$ annehmen, k ist bei jedem Summanden ganz beliebig und es handelt sich um eine endliche Summe.

Damit definieren wir die Abbildung

$$\Theta : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$$

durch

$$\begin{aligned} \Theta\left(P(x_1, \ldots, x_n)\right) &= \Theta\left(\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}\right) \\ &= \sum_i \frac{1}{k}\, a_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, [[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots], x_{i_k}]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Bespiel

Für $P(x, y, z) = 6xyxz - xz$ erhalten wir

$$\Theta(P(x, y, z)) = \frac{3}{2}[[[x, y], x], z] - \frac{1}{2}[x, z].$$

Natürlich kann die Abbildung Θ auf Polynome aus $\mathcal{S}$ sowie aus $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ angewendet werden.

Satz 3.2.2 (Dynkin-Specht-Wever)

Sei P ein Polynom aus $\mathcal{T}$. Dann gilt $\Theta(P) = P$.

Bemerkung

Dieser Satz wurde neben Dynkin auch fast zeitgleich von Specht in [6] und von Wever in [7] bewiesen. Daher wird dieser Satz als Dynkin-Specht-Wever Theorem bezeichnet.

Beweis

Jedes Polynom aus $\mathcal{T}$ kann nach Satz 3.1.3 als Linearkombination von Kommutatoren der Form $[[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots], x_{i_k}]$ dargestellt werden. Somit reicht es Satz 3.2.2 nur für

$$P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = [[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots], x_{i_k}]$$

zu zeigen.

Seien nun $P(x_1, \ldots, x_n)$ und $Q(x_1, \ldots, x_n)$ zwei Polynome mit

$$\Theta(P(x_1, \ldots, x_n)) = Q(x_1, \ldots, x_n).$$

Dann gilt aber für jedes n Tupel $i_1, \ldots, i_n$ mit Werten aus $1, \ldots, n$ auch

$$\Theta(P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) = Q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}).$$

Somit muss die Behauptung $\Theta(P) = P$ nur für

$$P(x_1, \ldots, x_n) \;=\; [[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n]$$

gezeigt werden.

Durch wiederholtes Anwenden von $[x, y] = xy - yx$ erhalten wir

$$[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}, \tag{3.2}$$

wobei mit $i_1, \ldots, i_n$ alle möglichen Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ durchlaufen werden und $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in K$ gilt.

Nach Lemma 2.3.2 haben wir für ein feste $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Darstellung

$$[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; \sum c_{k j_2 \ldots j_n}\, [[\ldots[x_k, x_{j_2}], \ldots], x_{j_n}]. \tag{3.3}$$

Mit $j_2, \ldots, j_n$ wird dabei über allen möglichen Permutationen der Zahlen $1, \ldots, k-1, k+1, n$ summiert.

Weiter gilt nach Lemma 2.3.3 auch

$$[[\ldots[x_k, x_{j_2}], \ldots], x_{j_n}] \;=\; x_k x_{j_2} \ldots x_{j_n} + \ldots, \tag{3.4}$$

wobei nur noch Monome folgen, die nicht mit x_k beginnen. Die Gleichungen (3.2) und (3.3) ergeben

$$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} \;=\; \sum c_{k j_2 \ldots j_n}\, [[\ldots[x_k, x_{j_2}], \ldots], x_{j_n}].$$

Nutzen wir dazu unsere Erkenntnis aus (3.4), so erhalten wir

$$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} \;=\; \sum c_{k j_2 \ldots j_n} \cdot (x_k x_{j_2} \ldots x_{j_n} + \ldots).$$

Daran erkennen wir, dass $a_{k j_2 \ldots j_n} = c_{k j_2 \ldots j_n}$ gilt und somit auch

$$[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; \sum a_{k j_2 \ldots j_n}\, [[\ldots[x_k, x_{j_2}], \ldots], x_{j_n}] \tag{3.5}$$

für bislang ein festes $k \in \{1, \ldots, n\}$. Addieren wir Gleichung (3.5) nun für alle k auf, dann erhalten wir sofort

$$n \cdot [[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, [[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots], x_{i_n}], \tag{3.6}$$

wobei mit $i_1, \ldots, i_n$ alle möglichen Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ durchlaufen werden.

Die Gleichungen (3.2) und (3.6) liefern nun

$$\begin{aligned}
\Theta(P(x_1, \ldots, x_n)) &= \Theta([[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n]) \\
&= \Theta\left(\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, [[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots], x_{i_n}] \\
&= [[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; P(x_1, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt wurde. $\square$

3.3 Polynome in verbesserter Kommutatordarstellung

Mit Hinblick auf die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe und das Zassenhaus Produkt betrachten wir nun Polynome mit zwei nicht kommutativen Unbekannten x und y. Den Polynomring $K[x,y]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{V}$.

Weiter sei $\mathcal{U}$ der Raum alle Polynome mit den zwei Unbekannten x und y, die in irgendeiner Weise eine Kommutatordarstellung besitzen. Es gilt also $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

Definition 3.3.1

Jedes Polynom P aus $\mathcal{V}$ kann geschrieben werden als

$$P(x,y) \;=\; \sum_i a_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}} \cdot x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k},$$

dabei sind die $x_{i_1},\ldots,x_{i_k} \in \{x,y\}$, k ist bei jedem Summanden ganz beliebig und es handelt sich um eine endliche Summe.

Damit definieren wir die Abbildung

$$\Psi_{xy} : \mathcal{V} \to \mathcal{S}$$

durch

$$\begin{aligned} & \Psi_{xy}\left(P(x,y)\right) \\ = \;& \Psi_{xy}\left(\sum a_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}} \cdot x_{i_2}\ldots x_{i_k}\right) \\ = \;& \sum_i \frac{a_{xyx_{i_3}x_{i_4}\ldots x_{i_k}}}{n_x(x_{i_3},x_{i_4},\ldots,x_{i_k})+1} \cdot [[\ldots[[[x,y],x_{i_3}],x_{i_4}],\ldots],x_{i_k}], \end{aligned} \tag{3.7}$$

dabei ist $n_x(x_{i_3},x_{i_4},\ldots,x_{i_k})$ die Anzahl der x in $\{x_{i_3},x_{i_4},\ldots,x_{i_k}\}$, zum Beispiel $n_x(x,y,x,x,y) = 3$ und $n_x(x,y,y,y) = 1$.

Bei der Abbildung Ψ_{xy} berüchsichtigen wir also nur die Monome des Polynoms $P(x,y)$, die mit xy beginnen.

Bespiel

Für das Polynom

$$P(x,y) \;=\; 5xyxxy - yxyy + 2yyxy - 3xxyy - 7xy$$

erhalten wir

$$\Psi_{xy}(P(x,y)) \;=\; \frac{5}{3}[[[[x,y],x],x],y] - 7[x,y].$$

Satz 3.3.2

Sei $P(x, y)$ ein Polynom aus $\mathcal{U}$. Dann gilt $\Psi_{xy}(P) = P$.

Beweis

Jedes Polynom aus $\mathcal{U}$ kann nach Satz 3.1.3 als Linearkombination von Kommutatoren der Form $[[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots], x_{i_k}]$ dargestellt werden. Somit reicht es Satz 3.3.2 nur für

$$P(x, y) \;=\; [[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots], x_{i_k}]$$

zu zeigen, dabei sind die $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in \{x, y\}$.

Wir betrachten P als Polynom mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ aber merken uns $x_m \in \{x, y\}$ für $m = 1, \ldots, n$. Dann haben wir die Behauptung gezeigt, wenn $\Psi(P) = P$ für

$$P(x_1, \ldots, x_n) \;=\; [[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n]$$

gilt.

Durch wiederholtes Anwenden von $[x, y] = xy - yx$ erhalten wir

$$[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; \sum a_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}} \cdot x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}, \tag{3.8}$$

wobei mit $i_1, \ldots, i_n$ alle möglichen Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ durchlaufen werden und $a_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}} \in K$ gilt.

Ganz analog zum Beweis von Satz 3.2.2 gilt für ein festes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Gleichung

$$[[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \;=\; \sum a_{x_k x_{j_2} \ldots x_{j_n}} [[\ldots[x_k, x_{j_2}], \ldots], x_{j_n}], \tag{3.9}$$

wobei die Summe mit $j_2, \ldots, j_n$ über allen möglichen Permutationen der Zahlen $1, \ldots, k-1, k+1, \ldots n$ verläuft.

Nun erinnern wir uns, dass $x_m \in \{x, y\}$ gilt und addieren Gleichung (3.9) für alle die k auf, für die $x_k = x$ ist. Damit erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} & n_x(x_1, \ldots, x_n) \cdot [[\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_n] \\ =\; & \sum a_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}} [[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], \ldots], x_{i_n}] \\ =\; & \sum a_{x x_{i_2} \ldots x_{i_n}} [[\ldots[x, x_{i_2}], \ldots], x_{i_n}], \end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei mit $i_1, \ldots, i_n$ alle die möglichen Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ durchlaufen werden, für die $x_{i_1} = x$ gilt. Weiter ist $n_x(x_1, \ldots, x_n)$ die Anzahl der x in $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Die Gleichungen (3.8) und (3.10) liefern zusammen mit $[x,x]=0$ dann

$$\begin{aligned}
\Psi(P(x,y)) &= \Psi(P(x_1,\ldots,x_n)) \\
&= \Psi([[\ldots[x_1,x_2],\ldots],x_n]) \\
&= \Psi\left(\sum a_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}}\cdot x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}\right) \\
&= \sum \frac{a_{xyx_{i_3}\ldots x_{i_n}}}{n_x(x_{i_3},x_{i_4},\ldots,x_{i_n})+1}\cdot[[\ldots[[[x,y],x_{i_3}],x_{i_4}],\ldots],x_{i_n}] \\
&= \sum \frac{a_{xx_{i_2}\ldots x_{i_n}}}{n_x(x_{i_3},x_{i_4},\ldots,x_{i_n})+1}\cdot[[\ldots[[x,x_{i_1}],x_{i_3}],\ldots],x_{i_n}] \\
&= \sum \frac{a_{xx_{i_2}\ldots x_{i_n}}}{n_x(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n})}\cdot[[\ldots[[x,x_{i_1}],x_{i_3}],\ldots],x_{i_n}] \\
&= \frac{1}{n_x(x_1,\ldots,x_n)}\cdot\sum a_{xx_{i_2}\ldots x_{i_n}}\,[[\ldots[[x,x_{i_1}],x_{i_3}],\ldots],x_{i_n}] \\
&= [[\ldots[x_1,x_2],\ldots],x_n] \;=\; P(x_1,\ldots,x_n) \;=\; P(x,y),
\end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt wurde. □

4 Beweis der Theoreme von Baker-Campbell-Hausdorff und von Zassenhaus

Das Baker-Campbell-Hausdorff Theorem besagt zum Einen, dass jeder Term z_n der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

$$\log\left(\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y\right) \;=\; x + y + \sum_{n=2}^{\infty} z_n$$

für $n \geq 2$ ein Polynom in x und in y ist, dass nur aus Monomen mit n Faktoren besteht. Die andere weitaus wichtigere Aussage ist, dass sich jedes $z_n(x, y)$ durch eine Linearkombination von Kommutatoren darstellen lässt. Jedes $z_n(x, y)$ ist also ein homogenes Lie-Element. Spezialfälle dieses Theorems wurden bereits von Baker und Campbell in [8, 9] untersucht, aber allgemein erst 1906 von Hausdorff in [10] bewiesen. Wir wollen uns daher den Beweis von Hausdorff genauer ansehen.

Analog zu diesem Theorem zeigte Zassenhaus, dass auch die c_n im Zassenhaus Produkt

$$\mathrm{e}^{a+b} \;=\; \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \mathrm{e}^{c_n}$$

Polynome in a und b sind, die nur aus Monomen mit n Faktoren bestehen. Auch hier lässt sich jedes Polynom $c(a, b)$ durch eine Linearkombination von Kommutatoren darstellen, auch die $c(a, b)$ sind also homogene Lie-Elemente. Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Baker-Campbell-Hausdorff Theorem, was Magnus in [11] auf der Grundlage einer unveröffentlichten Arbeit von Zassenhaus zeigte. Auch dies werden wir kurz untersuchen.

4.1 Das Theorem von Hausdorff

Definition 4.1.1

Weiterhin sei K ein Körper der Charakterisik 0 und es sei $\mathcal{R} = K[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring mit nicht kommutativen Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ über K.

Lassen wir neben auch Polynome auch abzählbar unendliche Reihen zu, so erhalten wir eine Menge $\mathcal{R}_\infty$, da wieder ein Ring ist. Alle Rechengesetze, insbesondere die Distributivgesetze, lassen sich auch hier einfach zeigen. So ist zum Beispiel

$$P(x_1, x_2, x_3) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} x_1^n x_2^{n+1} x_3^{n^2}$$

ein Polynom aus $\mathcal{R}_\infty$, nicht aber aus $\mathcal{R}$.

Mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ bezeichnen wir auch hier wieder die kleinste Teilmenge von $\mathcal{R}$, die die folgenden Elemente enthält:

(1) Es sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$.

(2) Mit $P, Q \in \mathcal{S}$ ist auch $\lambda P + \mu Q \in \mathcal{S}$ für alle $\lambda, \mu \in K$.

(3) Mit $P \in \mathcal{S}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist auch $[P, x_k] \in \mathcal{S}$.

Auch hier bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_\infty$ den Ring, bei dem wir eine Kombinationen aus einer abzählbar unendlichen Folge von Additionen von Monomen zulassen.

Definition 4.1.2

Der Operator

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

bedeutet eine Operation die darin besteht, dass je ein Faktor x aus einem Monom durch u ersetzt wird und sämtliche Glieder addiert werden. So ist zum Beispiel

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right) zxzyxxy \;=\; zuzyxxy + zxzyuxy + zxzyxuy.$$

Analog bedeutet

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)^n$$

die n-fache Anwendung des Operators. Es gilt also zum Beispiel

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 xyz \;=\; \left(u\frac{\partial}{\partial x}\right) uyz \;=\; 0.$$

Bemerkung 1

Dieser Operator kann auch direkt auf Kommutatoren angewendet werden. Es gilt also zum Beispiel

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right) [[[y, x], y], x] \;=\; [[[y, u], y], x] + [[[y, x], y], u].$$

Bemerkung 2

Es kann auch die Operation

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

ausgeführt werden. Sei $F \in \mathcal{R}_\infty = K[x,y,z]$ mit

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \ldots,$$

wobei jedes F_n ein Polynom in x, y und z ist, dessen Terme alle genau n-mal den Faktor x enthalten. Dann gilt

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x,y,z) = F_1 + 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \ldots .$$

Lemma 4.1.3

Sei $F(x)$ ein Polynom aus $\mathcal{R}_\infty = K[x,u]$, das nicht von u abhängt.

Dann ist auch $F(x+u) \in \mathcal{R}_\infty$ und es gilt

$$\begin{aligned} F(x+u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)^n F(x) \\ &= F(x) + \left(u\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x) + \frac{1}{2!}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 F(x) + \ldots . \end{aligned}$$

Diese Behauptung ergibt sich sofort durch die zuvor eingeführt Definition des Operators $\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Beispiel

Für $F(x,y,z) = xyz + 2yxx$ gilt

$$\begin{aligned} F(x+u,y,z) &= xyz + 2yxx + uyz + 2yux + 2yxu + \frac{1}{2!}(2yuu + 2yuu) \\ &= xyz + 2yxx + uyz + 2yux + 2yxu + 2yuu. \end{aligned}$$

Lemma 4.1.4

Lemma 4.1.3 lässt sich auch auf Funktionen mit mehreren Variablen verallgemeinern:

Sei $F(x,y)$ ein Polynom aus $\mathcal{R}_\infty = K[x,y,u,v]$, das nur von x und y abhängt.

Dann ist auch $F(x+u, y+v) \in \mathcal{R}_\infty$ und es gilt

$$\begin{aligned} F(x+u,y+v) &= F(x,y) + \left(\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) F(x,y) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)^2 F(x,y) + \ldots . \end{aligned}$$

Vorbereitungen

Wir betrachten die Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^t \;=\; 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots$$

und den Logarithmus

$$\log(t+1) \;=\; t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots$$

als Elemente aus $\mathcal{R}_\infty$. Ziel wird es nun sein, für nicht kommutierende Variablen x und y die Funktion $z(x,y)$ mit

$$\mathrm{e}^y\mathrm{e}^y \;=\; \mathrm{e}^z$$

zu untersuchen. Durch die Ansätze

$$\begin{aligned}
z &= \log(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y) \\
t &:= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y - 1 \;=\; (x+y) + \frac{1}{2}(xx + 2xy + yy) + \dots \\
z &= \log(t+1) \;=\; t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots \\
&= x + y + \frac{1}{2}(xy - yx) + \dots
\end{aligned}$$

ist leicht einsichtig, dass z ein Polynom aus $\mathcal{R}_\infty$ ist, doch wir wollen mehr:

Satz 4.1.5 (Hausdorff 1906)

Die Funktion $z(x,y)$ mit

$$\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y \;=\; \mathrm{e}^z$$

lässt sich bis auf den Term $x+y$ als unendliche Summe von Kommutatoren darstellen. Es gilt also $z \in \mathcal{S}_\infty$, das heißt die $z(x,y)$ sind Lie-Elemente.

Beweis

Wir unterteilen den Beweis in fünf Teile.

Erster Teil Nach Defintion 4.1.2 haben wir

$$\begin{aligned}
\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^x &= \left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(1 + x + \frac{1}{2!}xx + \frac{1}{3!}xxx + \dots\right) \\
&= u + \frac{1}{2!}(ux + xu) + \frac{1}{3!}(uxx + xux + xxu) + \dots .
\end{aligned}$$

Wir substituieren $u = [w, x]$ und erhalten damit

$$\begin{aligned}
&\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^x \\
= \;& [w,x] + \frac{1}{2!}([w,x]x + x[w,x]) + \frac{1}{3!}([w,x]xx + x[w,x]x + xx[w,x]) + \dots \\
= \;& (wx - xw) + \frac{1}{2!}(wxx - xxw) + \frac{1}{3!}(wxxx - xxxw) + \dots \\
= \;& w\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x w. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir nach der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x}w\mathrm{e}^x &= w + (wx - xw) + \frac{1}{2!}(wxx - 2xwx + xxw) \\
&= w + [w,x] + \frac{1}{2!}[[w,x],x] + \frac{1}{3!}[[[w,x],x],x] + \dots . \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (4.1) und (4.2) sowie mit $u = [w, x]$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^x &= w\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x w \\
&= \mathrm{e}^x \cdot \left([w,x] + \frac{1}{2!}[[w,x],x] + \frac{1}{3!}[[[w,x],x],x] + \dots\right) \\
&= \mathrm{e}^x \cdot \left(u + \frac{1}{2!}[u,x] + \frac{1}{3!}[[u,x],x] + \dots\right).
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis halten wir noch einmal fest:

$$\begin{aligned}
\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^x\varphi(u,x) \qquad \text{mit} \\
\varphi(u,x) &= u + \frac{1}{2!}[u,x] + \frac{1}{3!}[[u,x],x] + \frac{1}{4!}[[[u,x],x],x] + \dots . \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir auch

$$\begin{aligned}
\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^x &= \psi(u,x)\mathrm{e}^x \qquad \text{mit} \\
\psi(u,x) &= u - \frac{1}{2!}[u,x] + \frac{1}{3!}[[u,x],x] - \frac{1}{4!}[[[u,x],x],x] + \dots . \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Zweiter Teil Wir werden auch die Umkehrungen von $\varphi(u, x)$ und $\psi(u, x)$ benötigen. Sei also

$$p = \varphi(u,x) = u + \frac{1}{2!}[u,x] + \frac{1}{3!}[[u,x],x] + \frac{1}{4!}[[[u,x],x],x] + \dots . \qquad (4.5)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
[p,x] &= [u,x] + \frac{1}{2!}[[u,x],x] + \frac{1}{3!}[[[u,x],x],x] + \dots\,, \\
[[p,x],x] &= [[u,x],x] + \frac{1}{2!}[[[u,x],x],x] + \frac{1}{3!}[[[[u,x],x],x],x] + \dots\,, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ziel wird es nun sein, diese Gleichungsketten so aufzusummieren, dass zusammen mit Gleichung (4.5) auf der rechten Seite nur noch u übrig bleibt. Die gesuchten Koeffizienten sind dabei dieselben, wie wenn wir die Gleichung

$$p \;=\; u + \frac{1}{2!}ux + \frac{1}{3!}uxx + \frac{1}{4!}uxxx + \dots$$

nach u auflösen. Hier haben wir aber

$$p \;=\; u\frac{e^x - 1}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad u \;=\; p\frac{x}{e^x - 1}.$$

Die Funktion $u(p,x)$ lässt sich als Potenzreihe darstellen. Es gilt

$$u(p,x) \;=\; p - \frac{1}{2}px + \frac{1}{2!}B_1\,pxx - \frac{1}{4!}B_2\,pxxxx + \frac{1}{6!}B_3\,pxxxxxx - \dots,$$

dabei sind B_n die Bernoulli Zahlen:

$$B_1 \;=\; \frac{1}{6}, \qquad B_2 \;=\; \frac{1}{30}, \qquad B_3 \;=\; \frac{1}{42}, \qquad B_4 \;=\; \frac{1}{30}, \qquad \dots\,.$$

Somit haben wir die gesuchten Koeffizienten gefunden und erhalten als Auflösung von $p = \varphi(u,x)$

$$\begin{aligned}
u &= \chi(p,x) \qquad \text{mit} \\
\chi(p,x) &= p - \frac{1}{2}[p,x] + \frac{1}{2!}B_1\,[[p,x],x] - \frac{1}{4!}B_2\,[[[[p,x],x],x],x] + \dots
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Wieder analog erhalten wir als Auflösung von $q = \psi(u,x)$

$$\begin{aligned}
u &= \omega(q,x) \qquad \text{mit} \\
\omega(q,x) &= q + \frac{1}{2}[q,x] + \frac{1}{2!}B_1\,[[q,x],x] - \frac{1}{4!}B_2\,[[[[q,x],x],x],x] + \dots
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Dritter Teil Nun nutzen wir Lemma 4.1.3 sowie die Gleichungen (4.3) und (4.4). Für ein $\alpha \in K$ haben wir dann

$$\begin{aligned}
e^{x+\alpha u} &= e^x + \alpha\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)e^x + \alpha\,\frac{1}{2!}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 e^x + \dots \\
&= e^x + \alpha\,e^x\varphi(u,x) + \alpha^2\,\frac{1}{2!}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right)e^x\varphi(u,x) + \dots \\
&= e^x\cdot(1 + \alpha\,\varphi(u,x) + \dots) \;=\; (1 + \alpha\,\psi(u,x) + \dots)\cdot e^x\,.
\end{aligned}$$

In $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^z$ ersetzen wir x und y derart durch

$$x + \alpha u \qquad \text{und} \qquad y - \alpha v + O(\alpha^2),$$

dass $z = z(x, y)$ nicht verändert wird. Dabei sind $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ zwei Polynome in x und y, es gilt $\alpha \in K$ mit $\alpha \neq 0$ und mit $O(\alpha^2)$ werden alle die Terme zusammengefasst, die α von mindestens zweiter Potenz enthalten. Nach Lemma 4.1.4 haben wir dann

$$\begin{aligned} z(x,y) &= z(x + \alpha u,\, y - \alpha v + O(\alpha^2)) \\ &= z(x,y) + \alpha \cdot \left(\left(u \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(v \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) z(x,y) + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

und da $\alpha \neq 0$ gilt und z unverändert bleibt, erhalten wir die Bedingung

$$\left(u \frac{\partial}{\partial x} \right) z - \left(v \frac{\partial}{\partial y} \right) z \;=\; 0$$

sowie damit

$$\left(u \frac{\partial}{\partial x} \right) z \;=\; \left(v \frac{\partial}{\partial y} \right) z\,. \tag{4.8}$$

Diese ist also eine notwendige Bedingung, die wir an u und an v stellen. Wenn es umgekehrt Polynome u und v gibt, die diese Bedingung (4.8) erfüllen, so können wir auch die Gleichung

$$z(x,y) \;=\; z(x + \alpha u,\, y - \alpha v + O(\alpha^2))$$

sicherstellen, da wir ja jeweils noch die Korrekturterme $O(\alpha^2)$ mitführen. Damit ist (4.8) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Über die Existenz haben wir bislang noch keine Aussage getroffen, durch die folgenden Rechnungen werden wir aber explizite Polynome für u und für v angeben können.

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y &= \mathrm{e}^{x+\alpha u}\mathrm{e}^{y-\alpha v+\ldots} \\ &= \mathrm{e}^x \cdot (1 + \alpha\varphi(u,x) + \ldots) \cdot (1 - \alpha\psi(v,y) + \ldots) \cdot \mathrm{e}^y\,. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation von links mit e^{-x} und von rechts mit e^{-y} erhalten wir

$$1 \;=\; 1 + \alpha(\varphi(u,x) - \psi(v,y)) + O(\alpha^2).$$

Mit $\alpha \neq 0$ muss daher

$$\varphi(u,x) \;=\; \psi(v,y)$$

gelten. Nun wählen wir $u = x$ und erhalten damit

$$\varphi(u,x) \;=\; \varphi(x,x) \;=\; x,$$

somit folgt auch

$$\psi(v, y) \;=\; x \qquad \Leftrightarrow \qquad v \;=\; \omega(x, y).$$

Mit diesem v wird also nach (4.8) auch die Gleichung

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) z \;=\; \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right) z$$

erfüllt. Wählen wir umgekehrt $v = y$, dann erhalten wir analog $u = \chi(y, x)$. Damit haben wir gezeigt, dass $z = z(x, y)$ den folgenden beiden Gleichungen genügt:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) z \;=\; \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right) z \qquad \text{mit} \quad v \;=\; \omega(x, y), \tag{4.9}$$

$$\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right) z \;=\; \left(u\frac{\partial}{\partial x}\right) z \qquad \text{mit} \quad u \;=\; \chi(y, x). \tag{4.10}$$

Vierter Teil Der nächste Schritt ist es zu zeigen, dass wir jeweils mit (4.9) oder (4.10) in der Lage sind, z zu berechnen.

Dazu schreiben wir

$$z \;=\; z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \dots\,,$$

wobei z_n ein Polynom ist, dessen Terme alle genau n-mal den Faktor x enthalten. Dann haben wir bereits in der Bemerkung 2 zu Definition 4.1.2 gesehen, dass

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) z \;=\; z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + \dots$$

gilt. Weiter hat jeder Term von $v = \omega(x, y)$ genau einen x Faktor. Somit bekommen wir durch

$$\left(v\frac{\partial}{\partial y}\right) z$$

in jedem Term von z einen zusätzlichen Faktor x. Nach (4.9) haben wir also zusammen

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) z \;&=\; z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + \dots \\ &=\; \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)(z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \dots),\end{aligned}$$

womit sich nun offensichtlich

$$z_1 \;=\; \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right) z_0, \qquad 2z_2 \;=\; \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right) z_1, \qquad 3z_3 \;=\; \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right) z_2, \qquad \dots$$

ergibt. Mit $e^x e^y = e^z$ und $x = 0$ erhalten wir sofort $z_0 = y$ und damit

$$z_1 = v = \omega(x, y).$$

Da die Operation $\left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)$ auch direkt auf die Kommutatoren von v angewendet werden kann, sind wir in der Lage interativ alle z_n zu berechnen. Mit

$$\begin{aligned} v &= \omega(x, y), \\ \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(x, y) &= \omega_1(x, y), \\ \left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega_1(x, y) &= \omega_2(x, y), \qquad \ldots \end{aligned}$$

erhalten gilt also gerade

$$z(x, y) = y + \omega(x, y) + \frac{1}{2!}\omega_1(x, y) + \frac{1}{3!}\omega_2(x, y) + \ldots.$$

Analog erhalten wir aus Gleichung (4.10) mit

$$\begin{aligned} u &= \chi(y, x), \\ \left(u\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi(y, x) &= \chi_1(y, x), \\ \left(u\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi_1(y, x) &= \chi_2(y, x), \qquad \ldots \end{aligned}$$

die Reihe

$$z(x, y) = x + \chi(y, x) + \frac{1}{2!}\chi_1(y, x) + \frac{1}{3!}\chi_2(y, x) + \ldots.$$

Fünfter Teil Die Behauptung des Satzes ist nun leicht einsichtig: Da $\omega(x, y)$ und $\chi(y, x)$ Polynome aus $\mathcal{S}_\infty$ sind, muss auch $z(x, y)$ aus $\mathcal{S}_\infty$ sein. Die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe lässt sich also als unendliche Summe von Kommutatoren darstellen. □

Beispiel 4.1.6

Wie schon beschrieben sind wir mit diesem Beweis in der Lage z explizit zu berechnen. Dies wollen wir nun auch bis zu Termen vierter Ordnung tun.

Dazu haben wir

$$v = \omega(x, y) = x + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{2!}B_1\,[[x, y], y] - \frac{1}{4!}B_2\,[[[[x, y], y], y], y] + \ldots.$$

Mit den Bernoulli Zahlen $B_1 = 1/6$ und $B_2 = 1/30$ gilt also

$$v = \omega(x, y) = x + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[[x, y], y] - \frac{1}{720}[[[[x, y], y], y], y] + \ldots.$$

Weiter folgt

$$\left(v\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(x,y) \;=\; \frac{1}{2}[x,v]+\frac{1}{12}[[x,v],y]+\frac{1}{12}[[x,y],v]+\dots$$

und wieder mit $v=\omega(x,y)$ eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\omega_1(x,y) &= +\frac{1}{2}[x,x]+\frac{1}{4}[x,[x,y]]+\frac{1}{24}[x,[[x,y],y]]+\frac{1}{12}[[x,x],y]\\
&\quad +\frac{1}{24}[[x,[x,y]],y]+\frac{1}{12}[[x,y],x]+\frac{1}{24}[[x,y],[x,y]]+\dots\\
&= \frac{1}{4}[[y,x],x]-\frac{1}{12}[[[x,y],y],x]+\frac{1}{12}[[x,y],x]+\dots\\
&= \frac{1}{6}[[y,x],x]-\frac{1}{12}[[[x,y],y],x]+\dots .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
z &= y+\omega(x,y)+\frac{1}{2}\omega_1(x,y)+\dots\\
&= x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\frac{1}{12}[[x,y],y]+\frac{1}{12}[[y,x],x]-\frac{1}{24}[[[x,y],y],x]+\dots .
\end{aligned}$$

Wie schon hier zu erkennen ist, wird diese Verfahren sehr schnell unübersichtlich und zeitaufwendig.

4.2 Die Folgerung von Zassenhaus

Vorbereitungen

Wir betrachten die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

$$\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y \;=\; \mathrm{e}^{x+y+z_2+z_3+z_4+\dots}$$

und das exponentielle Zassenhaus Produkt

$$\mathrm{e}^{a+b} \;=\; \mathrm{e}^a\cdot\mathrm{e}^b\cdot\mathrm{e}^{c_2}\cdot\mathrm{e}^{c_3}\cdot\mathrm{e}^{c_4}\cdot\dots .$$

Nach dem die Baker-Campbell-Hausdorff Theorem wissen wir, dass die z_n Polynome in x und in y sind, die sich als Kommutatoren darstellen lassen. Jedes z_n besteht dabei aus Termen, die alle genau n Faktoren haben. Dies wollen wir nun auf das Zassenhaus Produkt übertragen.

Folgerung 4.2.1 (Zassenhaus)

Im Zassenhaus Produkt

$$\mathrm{e}^{a+b} \;=\; \mathrm{e}^a\cdot\mathrm{e}^b\cdot\mathrm{e}^{c_2}\cdot\mathrm{e}^{c_3}\cdot\mathrm{e}^{c_4}\cdot\dots .$$

sind die c_n Polynome in a und b, dessen Terme jeweils genau n Faktoren haben. Weiter lässt sich jedes c_n als Linearkombination von Kommutatoren darstellen, die $c_n(a,b)$ sind also Lie-Elemente.

Beweis

Zunächst wenden wir die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe auf $-a$ und $a+b$ an, wir erhalten damit

$$\begin{aligned}\exp(-a)\cdot\exp(a+b) &= \exp\left(-a+a+b+\sum_k d_{2,k}\right)\\ &= \exp\left(b+\sum_k d_{2,k}\right) =: \exp(b+f_2)\,,\end{aligned}$$

wobei $f_2 = \sum_k d_{2,k}$ ein Polynom ist, welches nur aus Monomen mit mindestens zwei Faktoren besteht und welches sich als Kommutator darstellen lässt. Nun wenden wir erneut die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe an:

$$\begin{aligned}\exp(-b)\cdot\exp(b+f_2) &= \exp\left(f_2+\sum_k d_{3,k}\right)\\ &=: \exp\left(c_2+\sum_k g_{3,k}\right) =: \exp(c_2+f_3)\,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Summen so sortiert, dass c_2 nur aus Monomen mit zwei Faktoren und $f_3 = \sum_k g_{3,k}$ nur aus Monomen mit mehr als zwei Faktoren besteht. Nach dem Baker-Campbell-Hausdorff Theorem wissen wir, dass sich c_2 als Summe von Kommutatoren schreiben lässt.

Dieses Verfahren führen wir nun weiter fort:

$$\begin{aligned}\exp(-c_2)\cdot\exp(c_2+f_3) &= \exp\left(f_3+\sum_k d_{4,k}\right)\\ &=: \exp\left(c_3+\sum_k g_{4,k}\right) =: \exp(c_3+f_4)\,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Summen wieder so sortiert, dass c_3 jeweils drei Faktoren und f_4 jeweils mehr als drei Faktoren pro Monom besitzt. Auch hier wissen wir bereits, dass sich c_3 als Summe von Kommutatoren darstellen lässt.

Im n-ten Schritt erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\exp(-c_{n-1})\cdot\exp(c_{n-1}+f_n) &= \exp\left(f_n+\sum_k d_{n+1,k}\right)\\ &=: \exp\left(c_n+\sum_k g_{n+1,k}\right)\\ &=: \exp(c_n+f_{n+1})\end{aligned}$$

und damit ergibt sich iterativ

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{c_n+f_{n+1}} &= \mathrm{e}^{-c_n} \cdot \mathrm{e}^{c_{n-1}+f_n} \\
&= \mathrm{e}^{-c_n} \cdot \mathrm{e}^{-c_{n-1}} \cdot \mathrm{e}^{c_{n-2}+f_{n-1}} \\
&\vdots \\
&= \mathrm{e}^{-c_n} \cdot \mathrm{e}^{-c_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{-c_2} \cdot \mathrm{e}^{-b} \cdot \mathrm{e}^{-a} \cdot \mathrm{e}^{a+b}.
\end{aligned}$$

Die c_k haben dabei für $2 \leq k \leq n$ die behaupteten Eigenschaften und wir können n gegen ∞ laufen lassen, womit die Folgerung gezeigt wurde. □

Es soll auch an dieser Stelle noch einmal kurz bemerkt werden, dass auch hierbei keine Konvergenzaussage getroffen wurde.

5 Die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe und das Zassenhaus Produkt

5.1 Die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

Definition der Reihe 5.1.1

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus werden für $|x| < 1$ über ihre Potenzreihen

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad \text{und} \qquad \log(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k \tag{5.1}$$

definiert. Durch einfaches Einsetzen dieser Definitionen erhalten wird die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe für zwei nicht kommutierende Variablen x und y in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \log\left(e^x e^y\right) &= \log\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} x^s \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m\right) \\ &= \log\left(\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots\right) \cdot \left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \dots\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(x + y + xy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}yy + \dots\right)^k . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Daraus ergibt sich nun die Summe zur Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe nach Dynkin:

$$\log\left(e^x e^y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} p_i! q_i!} \cdot x^{p_1} y^{q_1} \dots x^{p_k} y^{q_k} , \tag{5.3}$$

dabei gilt

$$p_i, q_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \text{und} \qquad p_i + q_i > 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1, \dots, k,$$

ansonsten sind alle möglichen Kombinationen denkbar.

Fassen wir in der Reihe aus Gleichung (5.3) nun alle die Terme zusammen, für die $p_1 + q_1 + \ldots + p_k + q_k = n$ gilt, so erhalten wir

$$\log\left(e^x e^y\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x,y). \tag{5.4}$$

Dabei ist $z_n(x,y)$ ein Polynom, welches nur aus Monomen vom Grad n besteht.

Berechnung der Polynome z_n

Soll ein beliebiges Polynom $z_n(x,y)$ berechnet werden, so kann direkt Gleichung (5.3) angewendet werden. Wir müssen dazu die Terme der Summe zu finden, bei denen das Wort jeweils aus n Buchstaben [bzw. Faktoren] besteht:

$$z_n(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} p_i! q_i!} \cdot x^{p_1} y^{q_1} \ldots x^{p_k} y^{q_k}\,, \tag{5.5}$$

mit

$$p_i, q_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \text{und} \qquad p_i + q_i > 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1, \ldots, k,$$

sowie mit

$$r \;:=\; \sum_{i=1}^{k} (p_i + q_i) \;=\; n.$$

Beispiel z_2

Es müssen alle möglichen Kombinationen für k und p_i, q_i mit $i = 1, \ldots, k$ gefunden werden, für die $r = 2$ gilt. Tabelle 5.1 zeigt diese Kombinationsmöglichkeiten.

k	p_1	q_1	p_2	q_2	Summand
1	1	1	-	-	xy
1	2	0	-	-	$\frac{1}{2}xx$
1	0	2	-	-	$\frac{1}{2}yy$
2	1	0	1	0	$-\frac{1}{2}xx$
2	1	0	0	1	$-\frac{1}{2}xy$
2	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}yx$
2	0	1	0	1	$-\frac{1}{2}yy$

Tabelle 5.1: Mögliche Kombinationen für $n = 2$.

Es ergibt sich demnach

$$z_2 \;=\; xy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}yx - \frac{1}{2}yy \;=\; \frac{1}{2}(xy - yx).$$

Bemerkung

Das Theorem vom Baker, Campbell und Hausdorff [8, 9, 10] besagt nun gerade, dass jedes Polynom $z_n(x,y)$ als Linearkombination von Kommutatoren geschrieben werden kann, dass alle $z_n(x,y)$ also homogene Lie-Elemente sind. Somit wissen wir, dass $z_n(x,y) \in \mathcal{S}$ gilt und können den Satz 3.2.2 von Dynkin-Specht-Wever sowie natürlich auch Satz 3.3.2 anwenden.

5.2 Das Zassenhaus Produkt

Definition des Produktes 5.2.1

Nutzen wir wieder die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion, so erhalten wir für das Zassenhaus Produkt für zwei nicht kommutierende Variablen a und b

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{a+b} \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(a+b)^k \\ = & \left(1+a+\frac{a^2}{2}+\ldots\right) \cdot \left(1+b+\frac{b^2}{2}+\ldots\right) \cdot \prod_{n=2}^{\infty}\left(1+c_k+\frac{c_k^2}{2}+\ldots\right) \\ = & \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b \cdot \mathrm{e}^{c_1} \cdot \mathrm{e}^{c_2} \cdot \mathrm{e}^{c_3} \cdot \ldots . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot a^{t_1} b^{u_1} \ldots a^{t_k} b^{u_k} \;=\; \sum \frac{1}{v_0! v_1! v_2! v_3! \ldots} \cdot a^{v_0} b^{v_1} c_2^{v_2} c_3^{v_3} \ldots , \tag{5.6}$$

wobei $t_m + u_m = 1$ für $m = 1, \ldots, k$ gilt und die zweite Summe für alle Kombinationen $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ mit $v_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ durchlaufen wird.

Berechnung der Polynome c_n

Mit dem Vorwissen, dass $c_n(a,b)$ ein Polynom ist, welches nur aus Monomen vom Grad n besteht, fassen wir in Gleichung (5.6) alle die Monome zusammenfassen, die den Grad n haben. Damit erhalten wir

$$c_n(a,b) \;=\; \sum \frac{1}{n!} \cdot a^{t_1} b^{u_1} \ldots a^{t_n} b^{u_n} - \sum \frac{1}{v_0! v_1! \ldots v_{n-1}!} \cdot a^{v_0} b^{v_1} c_2^{v_2} \ldots c_{n-1}^{v_{n-1}}, \tag{5.7}$$

dabei gilt wieder

$$t_m + u_m \;=\; 1 \qquad \text{für} \qquad m \;=\; 1, \ldots, n$$

und für die zweite Summe muss

$$v_0 + v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 + \ldots + (n-1) \cdot v_{n-1} \;=\; n$$

gelten.

Beispiel c_3

Wir müssen alle möglichen Kombinationen für die gerade beschriebenen Bedingungen finden. Alle Kombinationsmöglichkeiten wurden in den Tabellen 5.2 und 5.3 aufgeführt.

t_1	u_1	t_2	u_2	t_3	u_3	Summand
1	0	1	0	1	0	$\frac{1}{6}aaa$
1	0	1	0	0	1	$\frac{1}{6}aab$
1	0	0	1	1	0	$\frac{1}{6}aba$
1	0	0	1	0	1	$\frac{1}{6}abb$
0	1	1	0	1	0	$\frac{1}{6}baa$
0	1	1	0	0	1	$\frac{1}{6}bab$
0	1	0	1	1	0	$\frac{1}{6}bba$
0	1	0	1	0	1	$\frac{1}{6}bbb$

Tabelle 5.2: Mögliche Kombinationen für $n = 3$, erste Summe.

v_0	v_1	v_2	Summand
3	0	0	$-\frac{1}{6}aaa$
0	3	0	$-\frac{1}{6}bbb$
1	2	0	$-\frac{1}{2}abb$
2	1	0	$-\frac{1}{2}aab$
1	0	1	$-ac_2$
0	1	1	$-bc_2$

Tabelle 5.3: Mögliche Kombinationen für $n = 3$, zweite Summe.

Mit $c_2 = \frac{1}{2}(ba - ab)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{6}aaa + \frac{1}{6}aab + \frac{1}{6}aba + \frac{1}{6}abb + \frac{1}{6}baa + \frac{1}{6}bab + \frac{1}{6}bba + \frac{1}{6}bbb \\ &\quad -\frac{1}{6}aaa - \frac{1}{6}bbb - \frac{1}{2}abb - \frac{1}{2}aab - \frac{1}{2}aba + \frac{1}{2}aab - \frac{1}{2}bba + \frac{1}{2}bab \\ &= \frac{2}{3}bab - \frac{1}{3}aba - \frac{1}{3}abb - \frac{1}{3}bba + \frac{1}{6}baa + \frac{1}{6}aab. \end{aligned}$$

Bemerkung

Das Theorem vom Zassenhaus besagt gerade, dass jedes Polynom $c_n(a, b)$ als Linearkombination von Kommutatoren geschrieben werden kann, dass alle $c_n(a, b)$ also homogene Lie-Elemente sind. Somit gilt $c_n(x, y) \in \mathcal{S}$ und wir können den Satz 3.2.2 von Dynkin-Specht-Wever sowie natürlich auch Satz 3.3.2 anwenden.

6 Methoden zur Berechnung von z_n und c_n

Um die Lie-Elemente z_n aus der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe bzw. die c_n aus dem Zassenhaus Produkt für größere n [das heißt heutzutage in einer Größenordnung von $10 \leq n \leq 24$] zu berechnen, sind effiziente Implementierungen notwendig. Daher wollen wir an dieser Stelle alle uns bekannten Methoden zur Berechnung von z_n bzw. c_n vergleichen.

6.1 Die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe

Ursprünglich wurde von Hausdorff in [10] eine allgemeine Methode zur Berechnung der z_n geliefert. Diese Methode ist jedoch sehr kompliziert, ineffizient und lässt sich nicht besonders gut implementieren. Auch ein ähnliches Verfahren von Magnus, welches in [11] vorgestellt und auch in [12] angesprochen wird, ist sehr ineffizient und somit für größere n nicht geeignet.

Alle weiteren uns bekannten Methoden lassen sich vergleichsweise einfach implementieren. Wir wollen diese Verfahren daher wiederholen bzw. vorstellen und vergleichen.

6.1.1 Die elementare Methode

Die elementare Methode wird auch als Methode von Dynkin bezeichnet und beruht auf der direkten Anwendung der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Diese Methode wurde 1947 von Dynkin in [4] angegeben und wir haben sie bereits in Abschnitt 5.1 besprochen:

$$z_n(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} p_i! q_i!} \cdot x^{p_1} y^{q_1} \dots x^{p_k} y^{q_k} \tag{6.1}$$

mit $p_i, q_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p_i + q_i > 0$ für $i = 1, \dots, k$ sowie mit $\sum_{i=1}^{k}(p_i + q_i) = n$. Es ist zu beachten, dass wir damit zunächst Polynome erhalten, also noch keine Lie-Elemente aus Kommutatoren.

Bose wendete auf Gleichung (6.1) den Satz 3.2.2 von Dynkin-Specht-Wever an und stellte in [12] einen Algorithmus zur Berechnung von z_n vor.

Vor- und Nachteile

Ein Vorteil dieser Methode ist es, dass neben dem Satz 3.2.2 von Dynkin-Specht-Wever auch direkt Satz 3.3.2 auf Gleichung (6.1) angewendet werden kann. Ein Nachteil ist, dass zunächst alle Wahlmöglichkeiten für die p_i und q_i ermittelt werden müssen. Bereits für $n = 10$ erhalten wir 11144 unterschiedliche Kombinationen. Slebst wenn wir direkt Satz 3.3.2 anwenden, müssen weiterhin etwas 1/4 der Kombinationen aufsummiert werden.

Der Algorithmus von Bose fasst die Kombinationen zusammen, die das Gleiche Monom ergeben. Dadurch wird sein Algorithmus etwas effizienten, aber für größere n wird er sehr schnell ähnlich zeitaufwendig.

Einen effizienten Implementierung dieser Methode erscheint uns demnach als nicht möglich.

6.1.2 Die Methode von Richtmyer und Greenspan

Richtmyer und Greenspan haben 1965 in [13] aus der elementaren Methode (6.1) eine Formel zur Berechnung von z_n entwickelt, welche wir auch genau dann erhalten, wenn wir auf (6.1) den Satz 3.3.2 anwenden.

Dies entspricht der gleichen Methode zur Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe, wie sie in dem Lehrbuch von Hilgert und Neeb in [3] vorgestellt wird. Auch Varadarajan nutzt in seinem Lehrbuch [14] ein ähnliches Verfahren.

Vor- und Nachteile

Da nur Satz 3.3.2 auf die elementare Methode angewendet wurde, ergeben sich dieselben Nachteile wie zuvor. Auch Varadarajan bemerkte: „unfortunately, the calculations become complecated very rapidly.“

Eine effiziente Implementierung für größere n ist also auch hier nicht möglich.

6.1.3 Die Methode von Goldberg

Eine weitere wichtige Methode wurde 1956 von Goldberg in [15] veröffentlicht:

Wir definieren für $s \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$G_s(t) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t(t-1)G_{s-1}(t))$$

mit $G_1(t) = 1$. Weiter sei W ein Monom in x und y mit

$$W = x^{s_1} y^{s_2} \dots y^{s_m} \qquad \text{bzw.} \qquad W = x^{s_1} y^{s_2} \dots x^{s_m},$$

falls m gerade bzw. ungerade ist. Diese Monome beginnen alle mit x, daher schreiben wir auch W_x. Der ***Goldbergkoeffizient*** zu diesem Monom in der Baker-Campbell-Haudorff Reihe ist dann

$$g_{W_x} \;=\; \int_0^1 t^{m'}(t-1)^{m''} G_{s_1}(t)\dots G_{s_m}(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

mit $m' = [m/2]$ und $m'' = [(m-1)/2]$, dabei ist [ ] die Gaußklammer. Weiter gilt $g_{W_y} = (-1)^{n-1} g_{W_x}$.

Neben Goldberg findet man auch in dem Lehrbuch [16] von Reutenauer einen Beweis dieser Methode.

Dieses Verfahren wurde 1987 von Newman und Thompson implementiert. Sie waren in der Lage die Goldbergkoeffizienten bis $n = 20$ zu berechnen.

Vor- und Nachteile

Anders als bei der elementaren Methode haben wir hier kein derartiges Problem, dass erst bestimmt Wahlmöglichkeiten ermittelt werden müssen. Dafür haben wir die Koeffizienten zu allen möglichen Monomen zu ermitteln, dies sind für z_n genau 2^n.

Gleichung (6.2) können wir aber eine große Vereinfachung entnehmen: Jede Permutation der Zahlen $\{s_1, \dots, s_m\}$ ergibt denselben Koeffizienten, somit kann $s_1 \le \dots \le s_m$ vorausgesetzt werden. Mit dieser Regel lässt sich eine effizienten Implementieren erzielen.

Auch auf diese Methode kann direkt Satz 3.3.2 angewendet werden, womit die Methode nochmals effizienter wird.

6.1.4 Die Methode von Reinsch

Die Methode von Reinsch aus [17] haben wir bereits ausführlich in [2] diskutiert und wollen dies hier nicht wiederholen.

Vor- und Nachteile

Der große Vorteil dieser Methode ist ein sehr einfach Implementierung, mit nur wenigen Zeilen Quellcode kann die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe berechnet werden. Allerdings ist das Verfahren etwas langsamer als zum Beispiel die Methode von Goldberg, siehe Abschnitt 6.3.

Ein weiterer Nachteil besteht daran, dass der Satz 3.2.2 von Dynkin-Specht-Wever oder Satz 3.3.2 erst nach der Berechnung angewendet werden kann. Bei allen anderen Methoden ersparen wir uns wertvolle Rechenzeit dadurch, dass wir gar nicht erst das gesamte Polynom berechnen, sondern nur die Monome betrachten, die mit xy bzw. yx beginnen. Dies ist hier nicht möglich.

6.2 Das Zassenhaus Produkt

Zwei grundlegende recht komplizierte Methoden zur Berechnung der Lie-Elemente im Zassenhaus Produkt haben bereits Magnus und Wilcox in [11] und [18] angegeben. Auch Quesne nutze noch 2004 in [19] diese Verfahren, die aber keine geeigneten Implementierungen bieten.

Analog zur elementaren Methode und der Methode von Reinsch bei der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe lassen sich diese zwei Verfahren auch auf das Zassenhaus Produkt übertragen. Diese Methoden wollen wir nun vergleichen. Vorab stellen wir fest, dass beide Verfahren iterativ sind, das heißt wir müssen c_2 bis c_{n-1} kennen, bevor wir c_n berechnen können.

Neben den nun folgenden Methoden ist uns keine weitere effiziente Methode zur Berechnung des Zassenhaus Produktes bekannt. Ein noch zu untersuchender Punkt ist es, ob auch die Methode von Goldberg auf das Zassenhaus Produkt übertragen werden kann. Dies ist aber auch die einzige Methode, die wir diesbezüglich noch nicht untersucht haben.

6.2.1 Die elementare Methode

Wenden wir wieder die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion und des Logarithmus an, so erhalten wir

$$c_n(a,b) \;=\; \sum \frac{1}{n!} \cdot a^{t_1} b^{u_1} \dots a^{t_n} b^{u_n} - \sum \frac{1}{v_0! v_1! \dots v_{n-1}!} \cdot a^{v_0} b^{v_1} c_2^{v_2} \dots c_{n-1}^{v_{n-1}} \tag{6.3}$$

mit $t_m + u_m = 1$ für $m = 1, \dots, n$ und

$$v_0 + v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 + \dots + (n-1) \cdot v_{n-1} \;=\; n,$$

siehe Abschnitt 5.2.

Vor- und Nachteile

Auch hier kann direkt der Satz 3.2.2 von Dynkin-Specht-Wever oder Satz 3.3.2 angewendet werden.

Der größter Nachteil besteht wieder in der Ermittlung der Wahlmöglichkeiten für die v_i. Allerdings haben wir hier für $n = 10$ nur 139 Kombinationsmöglichkeiten, bei der elementaren Methode der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe waren es für $n = 10$ bereits 11144 Möglichkeiten. Dies liegt daran, dass in der Summe der v_i jeder Summand den Faktor i hat, somit gibt es gerade für v_i mit großen i sehr wenig Kombinationen.

Wir haben einen Algorithmus entwickelt, der uns alle Kombinationsmöglichkeiten der v_i ermittelt. Damit ist trotz der iterativen Struktur, die auch bei der folgenden Methode vorhanden ist, eine effiziente Implementierung möglich, siehe Abschnitt 6.3.

6.2.2 Die Methode von Scholz und Weyrauch

Diese Methode folgerten wir aus dem Verfahren von Reinsch zur Baker-Campbell-Hausdorff Reihe. Eine ausführliche Beschreibung wurde bereits in [1] und [2] geliefert.

Vor- und Nachteile

Dies ist das bislang einzige zur elementaren Methode vergleichbare Verfahren zur Berechnung des Zassenhaus Produktes. Leider ergeben sich ähnliche Nachteile, wie bei der Methode von Reinsch:

Wir müssen erst das gesamte Verfahren anwenden, bevor wir den Satz 3.2.2 von Dynkin-Specht-Wever oder Satz 3.3.2 nutzen können.

6.3 Vergleich der effizientesten Methoden

Wir haben alle Methoden zur Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe sowie des Zassenhaus Produktes ausführlich verglichen und implementiert. Die beiden jeweils effizientesten Verfahren wollen wir an dieser Stelle noch einmal gesondert betrachten.

Unsere Implementierungen benötigen zur Berechnung von z_n bzw. c_n auf einem Standard-PC mit 512 MB Arbeitsspeicher die der Tabelle 6.1 zu entnehmenden Zeiten in Sekunden. Es wurden dabei stets die Polynome ermittelt, nicht die Lie-Elemente mit Kommutatoren. Bei der Berechnung der Lie-Elemente werden die Unterschiede noch deutlicher.

	Goldberg	Reinsch		Elementar	Scholz & Weyrauch
z_5	0.1	0.0	c_5	0.0	0.1
z_6	0.1	0.1	c_6	0.1	0.3
z_7	0.2	0.1	c_7	0.1	0.7
z_8	0.3	0.1	c_8	0.2	1.8
z_9	0.5	0.2	c_9	0.5	4.6
z_{10}	0.8	0.5	c_{10}	1.1	11.8
z_{11}	1.3	1.4	c_{11}	2.7	30.0
z_{12}	1.9	3.3	c_{12}	7.2	75.8
z_{13}	3.1	9.0	c_{13}	19.7	184.3
z_{14}	4.9	22.1	c_{14}	57.4	–
z_{15}	8.2	57.0	c_{15}	158.0	–
z_{16}	13.5	138.0	c_{16}	–	–

Tabelle 6.1: Rechenzeit unserer Implementierungen in Sekunden.

Eine graphische Übersicht dieser Ergebnisse wird in Abbildung 6.1 gezeigt.

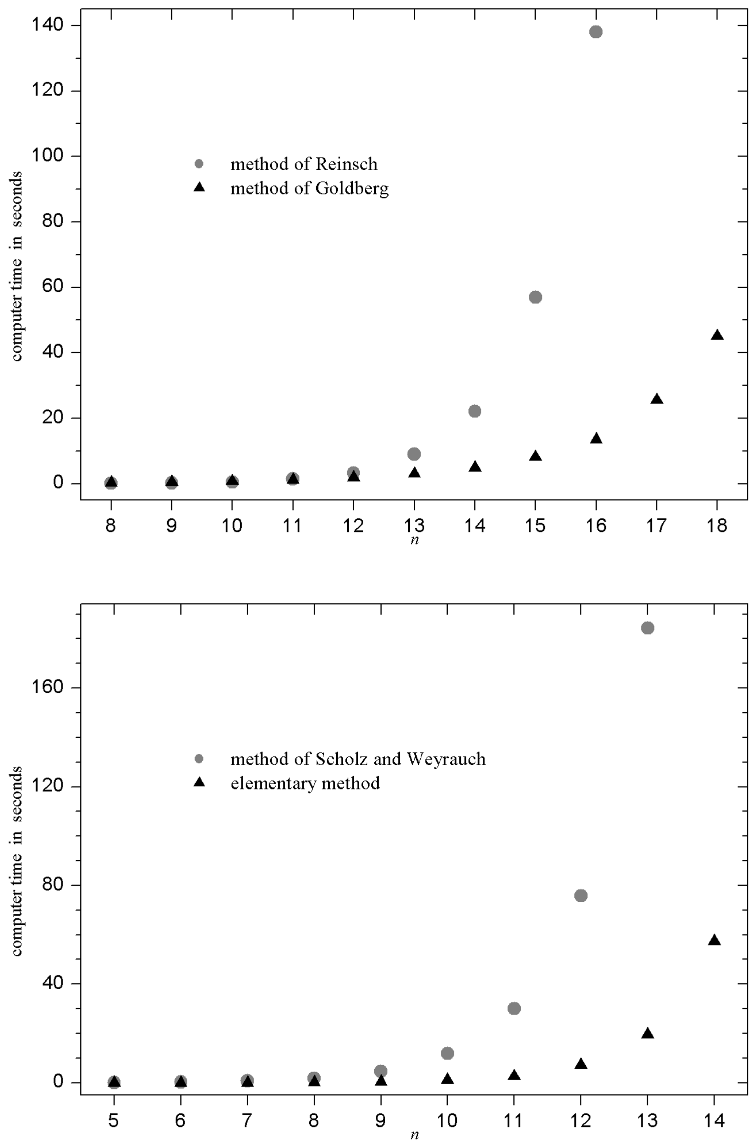


Abbildung 6.1: Veranschaulichung der Rechenzeit.

7 Diskussion

Wie in der Einleitung bereits bemerkt wurde, haben wir alle Betrachtungen auf rein algebraischer Ebene durchgeführt. Dazu haben wir zwar eine Lie-Algebra verwendet um eine Kommutatordarstellung zu erzielen, jedoch wurde an keiner Stelle eine Topologie oder eine Lie-Gruppen benötigt. Ohne Informationen über x und y bzw. a und b haben wir die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe sowie das Zassenhaus Produkt in eine formale unendliche Reihe entwickelt, die wir nach Satz 3.3.2 auch in eine Kommutatordarstellung übertragen können. Ohne Topologie haben wir natürlich auch keinerlei Aussagen über das Konvergenzverhalten treffen können.

Gerade die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe spielt in der Physik eine bedeutende Rolle, dabei wird jedoch stets eine Lie-Gruppe und damit auch eine Topologie verwendet, siehe zum Beispiel Gilmore in [20]. Nur mit der Voraussetztung einer Lie-ALgebra liefert uns die elementare Methode zur Berechnung der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe zusammen mit Satz 3.3.2 ein allgemeines Ergebnis als Lie-Element. Genau dieses Ergebnis wird auch in der Lie-Gruppentheorie erzielt und in der Physik angewendet, siehe Hilgert und Neeb in [3] bzw. Kleinert in [21]. Nur unterscheidet sich diese Ergebnis zu unserem in einem Punkt: Hier wird bereits eine Topologie vorausgesetzt, wodurch ein Zugang über Differentialgleichungen möglich wird und wodurch Konvergenzbetrachtungen zu treffen sind.

Auch auf unserer algebraischen Lösung des Problems können wir eine Topologie definieren und um derartige Betrachtungen durchzuführen, um einen weiteren Schritt in Richtung Lie-Gruppen zu machen. Genau dieses Vorgehen hat zum Beispiel auch Dynkin in [4] beschrieben. Unser Ziel war es jedoch mit so wenig Voraussetzungen wie möglich die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe sowie das Zassenhaus Produkt als Lie-Element zu beschreiben und genau dies ist uns auf algebraische Weise durch Satz 3.3.2 gelungen.

Literaturverzeichnis

[1] Scholz, D. ; Weyrauch, M.: A note on the Zassenhaus product formula. In: *J. Math. Phys.* 47 (2006), S. 033505

[2] Scholz, D.: *Die Baker-Campbell-Haussdorff Reihe und das Zassenhaus Produkt.* 2005

[3] Hilgert, J. ; Neeb, K.H.: *Lie–Gruppen und Lie–Algebren.* 1. Vieweg Verlag Braunschweig, 1991

[4] Dynkin, E.B.: Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula. In: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 57 (1947), S. 323–326. – In Russian. An English translation may be found in "Selected papers of E.B. Dynkin with commentary", E.B. Dynkin, A.A. Yushkevich, G.M. Seitz, A.L. Onishchik, editors. American Mathematical Society, Providence, R.I., and International Press, Cambridge, Mass., 2000.

[5] Dynkin, E.B.: On the representation by means of commutators of the series $\log e^x e^y$ for noncommuting x, y. In: *MSb25* 67 (1949), S. 155–162. – In Russian

[6] Specht, W.: Die linearen Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. In: *Math. Zeitschr.* 51 (1948), S. 367–376

[7] Wever, F.: Operatoren in Lieschen Ringen. In: *J. reine angew. Math.* 187 (1947), S. 44–55

[8] Baker, H.F.: In: *Proc. London Math. Soc.* 3 (1904), S. 24

[9] Campbell, J.E.: In: *Proc. London Math. Soc.* 29 (1898), S. 14

[10] Hausdorff, F.: In: *Ber. Verh. Saechs. Akad. Wiss., Leipzig, Math.-Phys. Kl.* 58 (1906), S. 19–48

[11] Magnus, W.: On the Exponential Solution of Differential Equations for a Linear Operator. In: *Commun. Pure Appl. Math.* 7 (1954), S. 649–673

[12] Bose, A.: Dynkin's method of computing the terms of th Baker-Campbell-Hausdorff series. In: *J. Math. Phys.* 30 (1989), S. 2035–2037

[13] Richtmyer, R.D. ; Greenspan, S.: In: *Commun. Pure Appl. Math.* 18 (1965), S. 107–108

[14] Varadarajan, V.S.: *Lie–Groups, Lie–Algebras, and Their Representations.* 1. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974

[15] Goldberg, K.: The formal power series for $\log \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$. In: *Duke Math. J.* 23 (1956), S. 13–21

[16] Reutenauer, C.: *Free Lie Algebras.* 1. Oxford, New York, 1993

[17] Reinsch, M.W.: A simple expression for the terms in the Baker-Campbell-Hausdorff series. In: *J. Math. Phys.* 41 (2000), S. 2434–2442

[18] Wilcox, R.M.: Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics. In: *J. Math. Phys.* 8 (1966), S. 962–982

[19] Quesne, C.: Disentangling q-Exponentials: A General Approach. In: *Int. J. Theor. Phys.* 43 (2004), S. 545–559

[20] Gilmore, R.: Baker-Campbell-Hausdorff formulas. In: *J. Math. Phys.* 15 (1974), S. 2090–2092

[21] Kleinert, H.: *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets.* 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004